musiques formelles

iannis xenakis

la revue musicale
éditions richard-masse
double numéro spécial 253 et 254
paris

Périodicité : 10 Numéros par série
dont 5 Numéros spéciaux
et 5 Carnets Critiques

DOUBLE NUMÉRO SPÉCIAL N° 253 et 254
Abonnement France : 120 F
Abonnement Etranger : 160 F

LA REVUE MUSICALE

Fondée en 1920 par Henry PRUNIERES

Directeur : Albert RICHARD — Rédacteur en Chef : Raphaël CUTTOLI

Gérance et Direction : Editions RICHARD-MASSE
7, place Saint-Sulpice - Paris (6e) — Compte Chèque Postal : 5620-35 - Paris

MUSIQUES FORMELLES

par

IANNIS XENAKIS

SOMMAIRE

Vente et abonnement aux
Editions RICHARD-MASSE

Tél. DANton 28-36

7, place Saint-Sulpice, Paris (6e)

MUSIQUES FORMELLES

MUSIQUES FORMELLES

Nouveaux principes formels
de composition musicale

par

IANNIS XENAKIS

LA
REVUE
MUSICALE
7, Place Saint-Sulpice — Paris VIe

CONTENU

AVANT-PROPOS

Ce livre est une collection d'études sur la composition musicale menées dans plusieurs directions. L'effort de réduire certaines sensations sonores, d'en comprendre les causes logiques, de les dominer, puis de s'en servir dans des constructions voulues; l'effort de matérialiser des mouvements de la pensée à l'aide de sons, puis de les expérimenter dans des compositions; l'effort de mieux comprendre les œuvres du passé, en recherchant une unité sous-jacente qui doit être commune à celle de la pensée scientifique de notre temps; l'effort de faire de « l'art » tout en « géométrisant », c'est-à-dire en lui donnant un appui raisonné moins périssable que l'impulsion du moment, donc plus sérieux, plus digne de la haute lutte que livre dans tous les autres domaines l'intelligence humaine;

Tous ces efforts ont conduit à une sorte d'abstraction, de formalisation de l'acte de la composition musicale. Cette abstraction, cette formalisation a trouvé dans certaines régions de la mathématique, comme tant d'autres sciences, un appui inespéré et, pensons-nous, fécond. Ce n'est pas tellement l'emploi fatal des mathématiques qui caractérise l'attitude de ces recherches, c'est surtout le besoin de considérer les sons, la musique, comme un vaste réservoir (tout au moins en puissance), de moyens nouveaux, dans lesquels la connaissance des lois de la pensée et les créations structurées de la pensée peuvent trouver un médium de matérialisation (= communication) absolument nouveau.

A ce titre, le son beau ou laid n'a pas de sens, ni la musique qui en découle; la quantité d'intelligence portée par les sonorités doit être le vrai critère de validité de telle ou telle musique.

Ceci n'empêche pas l'utilisation de symboles sonores (sons) définis comme agréables ou beaux suivant la mode de l'instant, ni même leur étude en soi qui peut enrichir la symbolisation et l'algébrisation. L'*efficacité* est aussi un signe d'intelligence.

Nous sommes tellement convaincus de la nécessité historique de cette démarche, que nous aimerions voir les arts de la vision prendre un chemin analogue, à moins que des « artistes » d'un type nouveau ne l'aient déjà fait dans des laboratoires à l'abri des publicités tapageuses.

Ces études ont toujours reçu des réponses réelles constituées par les œuvres qui en jalonnent les étapes. Les œuvres constituent le dossier expérimental de cette démarche.

Œuvres et études ont été honorées et promulguées grâce à l'amitié et l'appui moral et matériel du professeur Hermann Scherchen.

Certains chapitres du présent ouvrage reflètent les conséquences de l'enseignement de certains maîtres tels que H. Scherchen et Olivier Messiaen en musique et le professeur G. Th. Guilbaud en mathématiques qui, par la virtuosité de sa pensée généreuse, m'a permis de voir plus clair dans les algèbres (mexicaine, booléenne, etc.) qui constituent la toile de fond du chapitre consacré à la musique Symbolique.

CHAPITRE I

MUSIQUES STOCHASTIQUES
(générales, libres)

Ce chapitre traite des origines de cette démarche.

MUSIQUES STOCHASTIQUES
(générales, libres)

L'ART (et surtout la musique) a bien une fonction fondamentale qui est de catalyser la sublimation qu'il peut apporter par tous les moyens d'expression. Il doit viser à entraîner par des fixations-repères vers l'exaltation totale dans laquelle l'individu se confond, en perdant sa conscience, avec une vérité immédiate, rare, énorme et parfaite. Si une œuvre d'art réussit cet exploit ne serait-ce qu'un instant, elle atteint son but. Cette vérité géante n'est pas faite d'objets, de sentiments, de sensations, elle est au-delà, comme la 7e de Beethoven est au-delà de la musique. C'est pourquoi l'art peut conduire aux régions qu'occupent encore chez certains les religions.

Mais cette transmutation de l'artisanat quotidien qui métamorphose les produits triviaux en méta-art est un secret. Les « possédés » y arrivent sans en connaître les « mécanismes ». Les autres se débattent dans les bas courants idéologiques et technicistes de leur époque qui constituent le « climat » périssable, la mode des expressions.

En gardant les yeux posés sur ce but suprême méta-artistique, nous allons essayer de définir plus modestement les voies qui peuvent y conduire à partir du magma des contradictions des musiques actuelles.

Il existe un parallélisme historique entre la musique européenne et les tentatives successives d'expliquer le monde par la raison. Déjà la musique de l'antiquité, causale et déterministe, était fortement influencée par l'école pythagoricienne et celle de Platon. Platon insistait sur le principe de la causalité : « ...car il est impossible que quoi que ce soit puisse naître sans cause [*]. » La causalité stricte atteignit le XIXe siècle lorsqu'elle subit une transformation brutale et féconde due aux théories statistiques en physique. En effet la notion de hasard (τύχη), liée à celle de désordre (ἀταξία), et à celle de désorganisation était depuis l'antiquité considérée comme l'opposé, comme la négation de la raison (λόγος), de l'ordre (τάξις) et de l'organisation (σύστασις). Ce n'est que récemment que la connaissance a pu pénétrer dans le hasard et a su en dégager des degrés, c'est-à-dire le rationaliser progressivement, sans pourtant réussir une explication définitive et totale du problème « hasard pur ».

Avec quelques décennies de retard, la musique atonale rompait la fonction tonale et ouvrait une nouvelle voie parallèle à celle des sciences physiques mais aussitôt barrée par le déterminisme quasi absolu de la musique sérielle.

Il n'est donc pas étonnant que la présence ou l'absence du principe causal dans la philosophie d'abord puis dans les sciences puisse influencer la composition musicale et lui faire suivre des voies en apparence divergentes mais qui, en réalité, se résorbent dans la Théorie des Probabilités et éventuellement dans les logiques polyvalentes, sortes de généralisations, d'enrichissements du principe de la causalité. L'explication du monde et par conséquent des phénomènes sonores qui nous entourent ou qui peuvent être créés nécessitait (et profitait de) l'élargissement du principe causal dont la base est formée par la loi des grands nombres. Cette loi implique une évolution asymptotique vers un état stable, vers une sorte de but, de στόχος, d'où vient l'adjectif *stochastique*.

Mais tout dans le déterminisme pur, ou dans l'indéterminisme moins pur, est soumis aux lois opérationnelles fondamentales de la logique qu'est arrivée à dégager la pensée mathématique sous le titre d'Algèbre générale. Ces lois opèrent sur des êtres isolés ou sur des ensembles d'éléments à l'aide d'opérations dont les plus primitives sont la réunion notée $\cup$ et l'intersection notée $\cap$. La négation, l'équivalence, l'implication et les quantifications sont des relations élémentaires à partir desquelles peut être bâtie toute la science actuelle.

La musique peut donc être définie comme une organisation de ces opérations et de ces relations élémentaires entre des êtres ou entre des fonctions d'êtres sonores. Nous comprenons la place de choix qui revient à la Théorie des Ensembles non seulement pour la construc-

(*) ... παντὶ γὰρ ἀδύνατον χωρὶς αἰτίου γένεσιν σχεῖν. Platon, *Timée*.

tion d'œuvres nouvelles mais aussi pour l'analyse et la meilleure compréhension des œuvres du passé. Ainsi même une construction stochastique ou une investigation de l'histoire à l'aide de la stochastique ne peuvent être exploitées sans l'aide de la reine des sciences et même des arts dirais-je, qu'est la Logique ou sa forme mathématique l'Algèbre. Car tout ce qui est dit ici au sujet de la musique est aussi valable pour toutes les formes de l'art (peinture, sculpture, architecture, cinéma, etc.).

De ce point de vue très général, fondamental, d'où nous voulons scruter et *faire* la musique, le Temps primaire apparaît comme une matière cireuse, une glaise dans laquelle les opérations et les relations viennent s'inscrire, se graver pour des fins de travail d'abord et par la suite pour des fins de communication au tiers. A ce niveau, le caractère asymétrique, non commutatif du Temps est utilisé, (B après A $\neq$ A après B, ordre lexicographique), le Temps métrique (symétrique), commutatif, étant soumis aux mêmes lois de la logique et pouvant donc servir lui aussi aux spéculations de l'organisation. Ce qui est remarquable c'est que ces notions fondamentales nécessaires à la Construction se retrouvent chez l'homme dès sa plus tendre enfance et il est passionnant de suivre leurs évolutions ainsi que l'a fait Jean Piaget *.

Après ce court préambule général qui tient lieu de contexte, nous allons entrer dans les détails d'une attitude musicale de composition que j'ai élaborée depuis plusieurs années et que j'ai appelée stochastique en l'honneur de la Théorie des Probabilités qui a servi de cadre logique et au calcul des conflits et « nœuds » rencontrés.

Première tâche est celle de faire abstraction de toutes les conventions héritées et d'exercer une critique fondamentale des actes de la pensée et de leur matérialisation. En effet que propose une œuvre musicale au niveau strict de la construction ? Elle propose une collection de successions qu'elle veut causales. Lorsque, pour simplifier, la gamme majeure impliquait sa hiérarchie des fonctions tonales, toniques dominantes, sous-dominantes, autour desquelles gravitaient les autres tons, elle structurait ainsi d'une part les processus linéaires, les mélodies et d'autre part les simultanéités, les accords, d'une manière fortement déterministe. Puis les sériels de l'Ecole de Vienne, n'ayant pas su maîtriser logiquement l'indéterminisme de l'Atonalité, sont revenus à une organisation fortement causale au sens strict, plus abstraite que la tonale, ce qui fait quand même leur grand mérite. Messiaen généralisa cette

(*) *Le développement de la notion de Temps chez l'enfant*, par Jean Piaget (Presses Universitaires de France).

démarche et fit un grand pas en systématisant l'abstraction de toutes les variables de la musique instrumentale. Ce qui est paradoxal, c'est qu'il le fit dans le champ modal. Il créa une musique multimodale qui trouva immédiatement des imitateurs dans la musique sérielle. La systématisation abstraite de Messiaen se trouvait d'emblée plus justifiée dans une musique multisérielle. C'est de là que les néo-sériels d'après guerre ont tiré toute leur sève. Ils pouvaient maintenant à la suite des Viennois et de Messiaen avec quelques emprunts occasionnels à Strawinsky et Debussy, marcher les yeux fermés et proclamer une vérité plus forte que les autres. D'autres courants se fortifièrent dont le principal est celui de l'exploration systématique des êtres sonores, d'instruments nouveaux, des « bruits ». Varèse en était le pionnier et les musiques électromagnétiques les bénéficiaires (la musique électronique étant une succursale de la musique instrumentale). Pourtant dans les musiques électromagnétiques les problèmes de construction et de morphologie n'étaient pas consciemment posés. La musique multisérielle, fusion de la multimodalité de Messiaen et de la Viennoise, restait quand même au cœur du problème fondamental de la musique.

Mais déjà, en 1954, elle s'essoufflait, car la complexité absolument déterministe des opérations compositionnelles et des œuvres engendrait un non-sens auditif et idéologique. Je constatais l'événement dans le N° 1 des *Gravesaner Blätter* dans l'article intitulé « La crise de la musique sérielle »...

« *La polyphonie linéaire se détruit d'elle-même par sa complexité actuelle. Ce qu'on entend n'est en réalité qu'amas de notes à des registres variés. La complexité énorme empêche à l'audition de suivre l'enchevêtrement des lignes et a comme effet macroscopique une dispersion irraisonnée et fortuite des sons sur toute l'étendue du spectre sonore. Il y a par conséquent contradiction entre le système polyphonique linéaire et le résultat entendu qui est surface, masse. Cette contradiction inhérente à la polyphonie disparaîtra lorsque l'indépendance des sons sera totale. En effet, les combinaisons linéaires et leurs superpositions polyphoniques n'étant plus opérantes, ce qui comptera sera la moyenne statistique des états isolés et des transformations des composantes à un instant donné. L'effet macroscopique pourra donc être contrôlé par la moyenne des mouvements des objets choisis par nous. Il en résulte l'introduction de la notion de probabilité, qui implique d'ailleurs, dans ce cas précis, le calcul combinatoire. Voilà, en peu de mots, le dépassement possible de la « catégorie linéaire » de la pensée musicale.* »

Cet article servait de pont à l'introduction des mathématiques en musique. Car si, grâce à la complexité, la causalité stricte, déterministe, que prônaient les néo-sériels était perdue, il fallait la remplacer par une causalité plus générale, par une logique probabiliste qui contiendrait comme cas particulier la causalité sérielle stricte. C'est le cas de la « stochastique ». La stochastique étudie et formule les lois dites des grands nombres ainsi que celle des événements rares, les divers processus aléatoires, etc. Voici donc comment, à partir entre autres de l'impasse des musiques sérielles, est née en 1954, une musique fabriquée du principe de l'indéterminisme que deux ans plus tard j'ai baptisée : *Musique stochastique*. Les lois du calcul des probabilités entraient par nécessité musicale dans la composition.

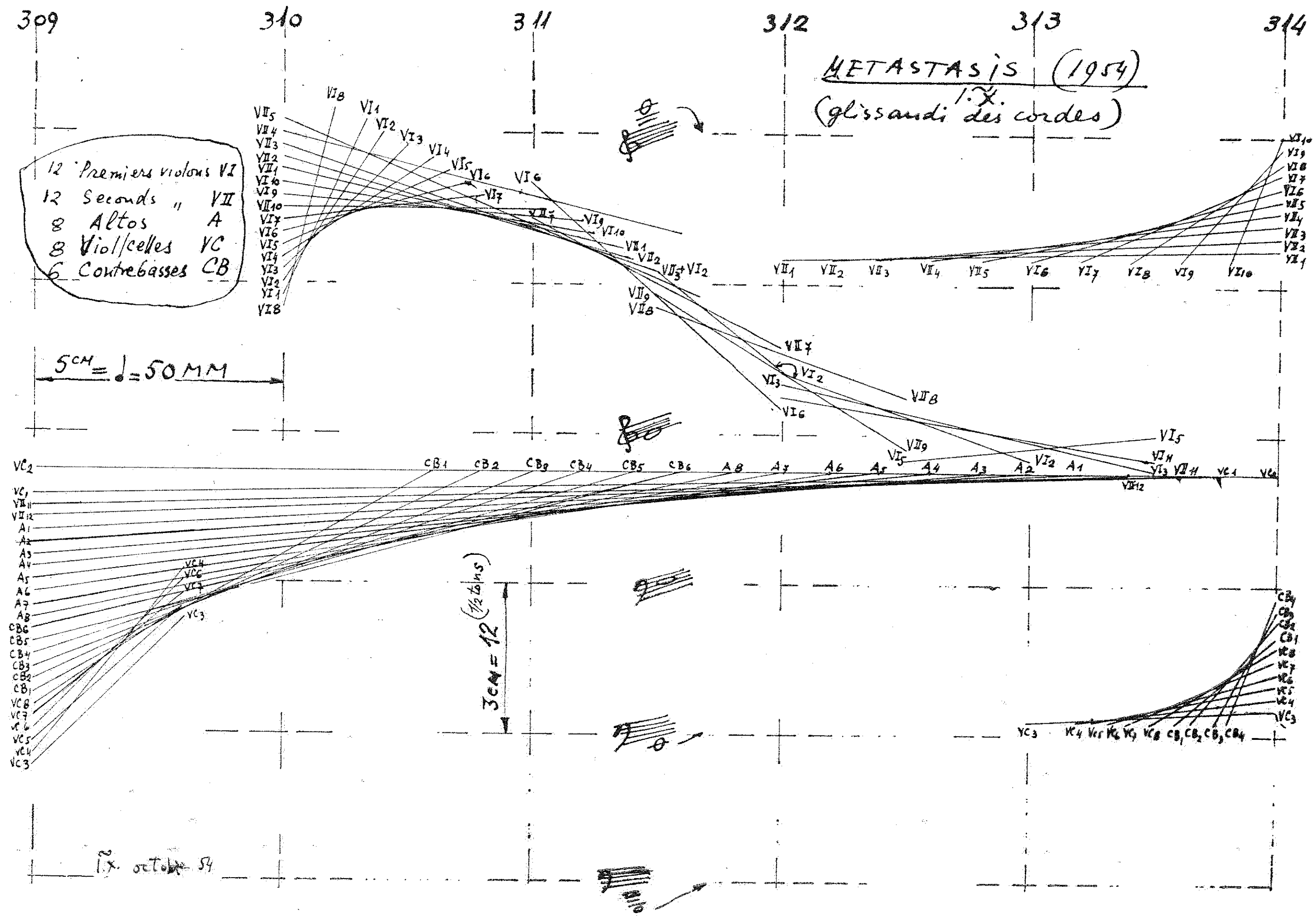
Mais d'autres voies conduisent aussi au même carrefour stochastique. Tout d'abord des événements naturels tels que les chocs de la grêle ou de la pluie sur des surfaces dures ou encore le chant des cigales dans un champ en plein été. Ces événements sonores globaux sont faits de milliers de sons isolés, dont la multitude crée un événement sonore nouveau sur un plan d'ensemble. Or cet événement d'ensemble est articulé et forme une plastique temporelle qui suit, elle aussi, des lois aléatoires, stochastiques. Si donc on veut modeler un grand amas de notes ponctuelles telles que des pizzicati de cordes, il faut connaître ces lois mathématiques, qui ne sont d'ailleurs ni plus ni moins qu'une expression dense et serrée d'une chaîne de raisonnements logiques. Tout le monde a observé les phénomènes sonores d'une grande foule politisée de dizaines ou de centaines de milliers de personnes. Le fleuve humain scande un mot d'ordre en rythme unanime. Puis un autre mot d'ordre est lancé en tête de la manifestation, et se propage à la queue en remplaçant le premier. Une onde de transition part ainsi de la tête à la queue. La clameur emplit la ville, la force inhibitrice de la voix et du rythme est culminante. C'est un événement hautement puissant et beau dans sa férocité. Puis le choc des manifestants et de l'ennemi se produit. Le rythme parfait du dernier mot d'ordre se rompt en un amas énorme de cris chaotiques qui, lui aussi, se propage à la queue. Imaginons de plus des crépitements de dizaines de mitrailleuses et les sifflements des balles qui ajoutent leur ponctuation à ce désordre total. Puis, rapidement, la foule est dispersée et, à l'enfer sonore et visuel, succède un calme détonant, plein de désespoir, de mort et de poussière. Les lois statistiques de ces événements vidés de leur contenu politique ou moral, sont celles des cigales ou de la pluie. Ce sont des lois du passage de l'ordre parfait au désordre total d'une manière continue ou explosive. Ce sont des lois stochastiques.

Ici, nous touchons du doigt un des grands problèmes qui ont hanté l'intelligence depuis l'antiquité : la transformation continue ou discontinue. Les sophismes du mouvement (Achille et la tortue), celui de la définition (calvitie), sont, notamment le dernier, résolus par la définition statistique, c'est-à-dire par la stochastique. Or on peut engendrer la continuité soit à l'aide d'éléments continus, soit à l'aide d'éléments discontinus. Une foule de glissandi courts de cordes peut donner l'impression du continu, et une foule d'événements pizzicati le peut également. Les passages d'un état discontinu à un état continu sont réglables à l'aide de la stochastique. J'ai fait toutes ces expériences passionnantes dans des œuvres instrumentales depuis longtemps déjà. Mais le caractère mathématique de ces musiques a effarouché les musiciens et en a rendu l'approche particulièrement difficile.

Voici encore une autre direction qui converge, elle aussi, vers l'indéterminisme. L'étude de la variation par exemple du rythme pose le problème de savoir quelle est la limite de l'asymétrie totale, de la rupture par conséquent complète de la causalité entre les durées. Les sons d'un tube Geiger à proximité d'une source radio-active en donnent une image assez saisissante. La stochastique en fournit les lois. Avant de clore ce petit tour d'observation d'événements riches en logique nouvelle et qui, récemment encore, étaient fermés à l'entendement, je ferai une petite parenthèse. Si les glissandi sont longs et dûment enchevêtrés, nous obtenons des espaces sonores d'évolution continue. Parmi ces possibilités, il y a celles qui fournissent graphiquement (les glissandi étant dessinés sous forme de droites) des surfaces réglées. J'en ai fait l'expérience dans les *Metastasis* créés en 1955 à Donaueschingen. Or quelques années plus tard lorsque l'architecte Le Corbusier, dont j'étais le collaborateur, m'a demandé de lui proposer un projet pour l'architecture du Pavillon Philips de Bruxelles, mon travail de conception a été aiguillé par l'expérience des *Metastasis*. Ainsi, je crois que cette fois musique et architecture ont trouvé une correspondance intime. (Cf. *Revue technique Philips,* tome 20, n° 1.)

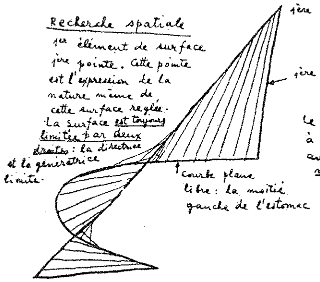
Nous livrons dans les planches qui suivent, l'enchaînement causal des idées qui, de la partition des *Metastasis* m'ont conduit à formuler l'architecture du Pavillon Philips.


309
310
315
317
P Fl
G Fl
Xyl
VI
VII
A
VC
CB
norm.
glissando


309
310
311
312
313
314
METASTASIS (1954)
I.X.
(glissandi des cordes)
12 Premiers violons VI
12 Seconds " VII
8 Altos A
8 Violoncelles VC
6 Contrebasses CB
5cm = ♩ = 50 MM
3cm = 12 (1/2 tons)
I.X. octobre 54

Recherche spatiale

1er élément de surface
1ère pointe. Cette pointe est l'expression de la nature même de cette surface reglée. La surface est toujours limitée par deux droites: la directrice et la génératrice limite.

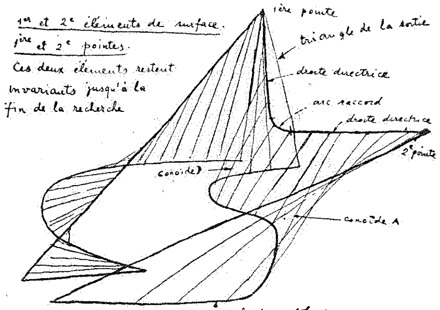


Le problème consiste à couvrir l'estomac avec un nombre minimum de surfaces reglées.

Parce postulat impliqué dans ces surfaces reglées, toute la plastique du Pavillon sera conditionnée. C'est pour cela que les pointes et leur équilibre plastique sont soulignés dans cet exposé.

1er et 2e éléments de surface. 1ère et 2e pointes.

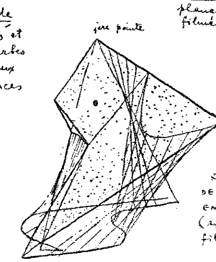
Ces deux éléments restent invariants jusqu'à la fin de la recherche



courbe plane libre: la moitié droite de l'estomac.

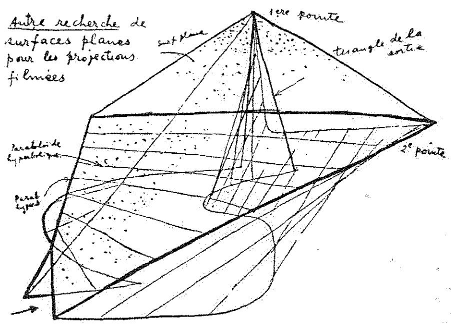
Indications de surfaces planes et de surfaces courbes Jonction des deux premières surfaces reglées.

Recherche des surfaces planes de projections filmées



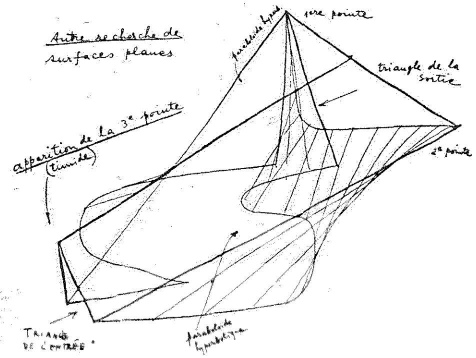
COMPOSITION DE LA COUVERTURE EN SURFACES PLANES (surfaces de projections filmées)

Autre recherche de surfaces planes pour les projections filmées



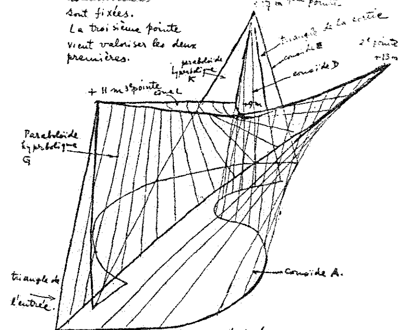
Autre recherche de surfaces planes

apparition de la 3e pointe (timide)

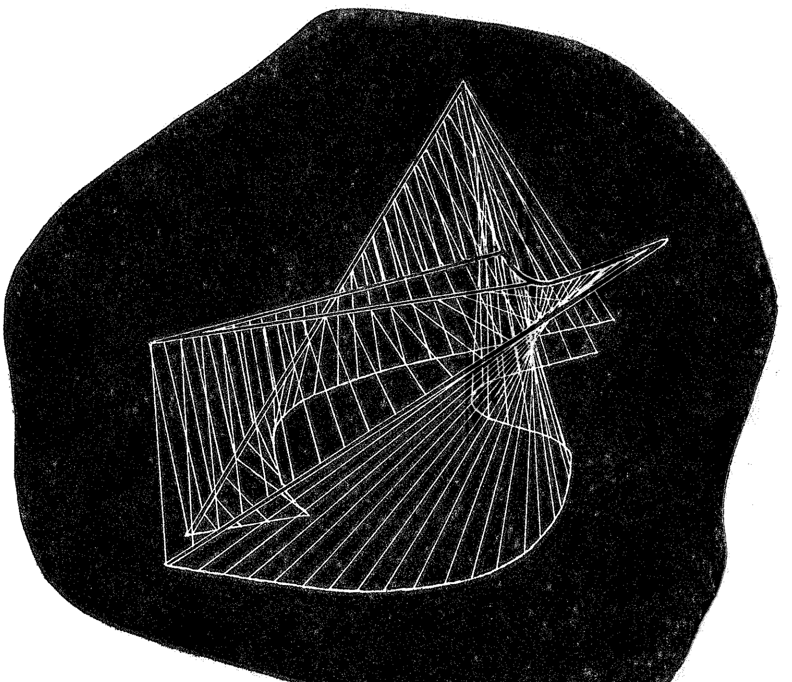


IDEE COMPLETE AYANT DONNÉ LA 1ère MAQUETTE (1er PROJET)

Les surfaces planes sont abandonnées. Les cotes sont fixées. La troisième pointe vient valoriser les deux premières.

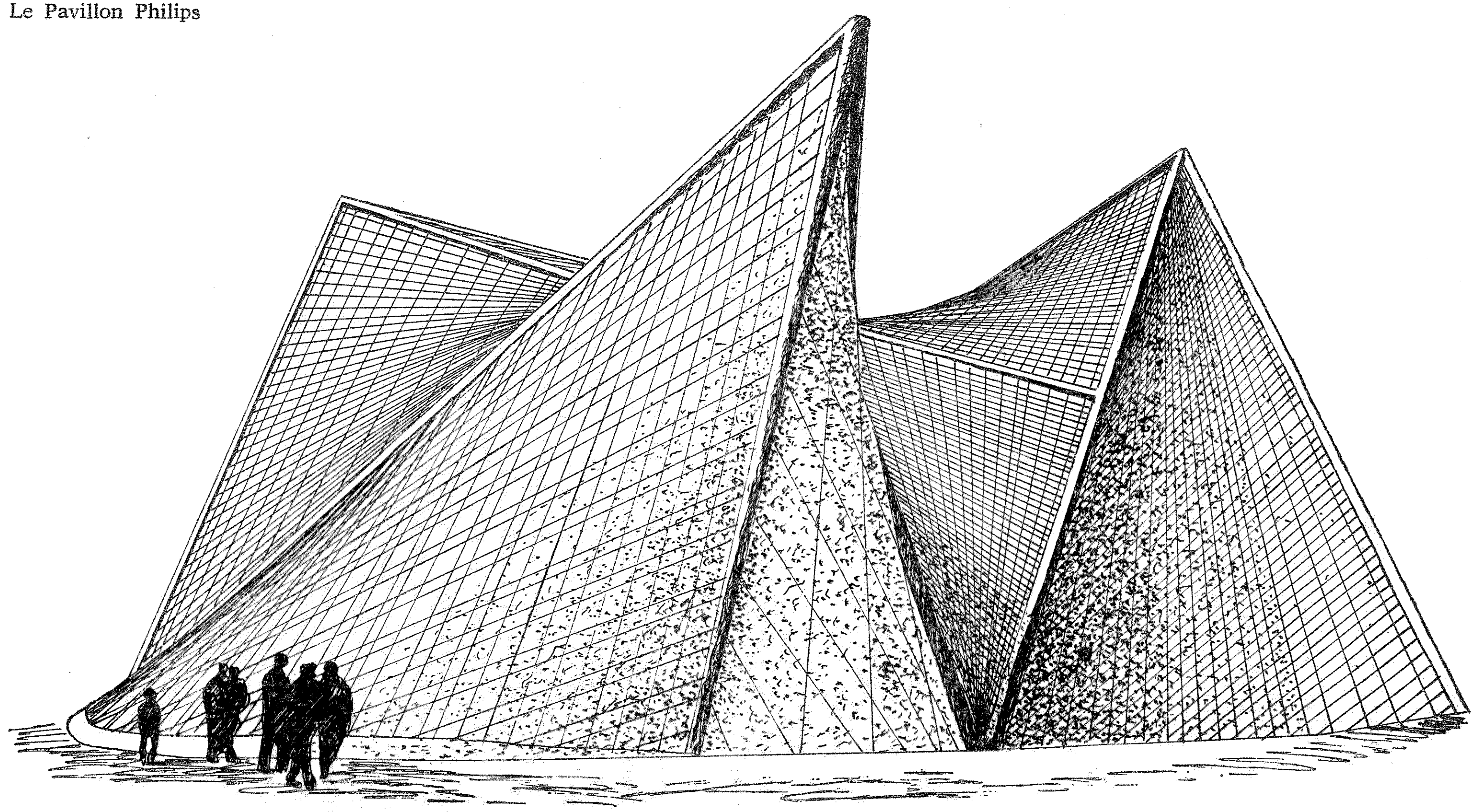


Ici la troisième pointe s'est épanouie:
Elle équilibre le mouvement impétueux des deux pointes en créant un contre-courant.



Première maquette

Le Pavillon Philips



Lois stochastiques et Incarnations

Je donne au pas de course quelques-unes des lois stochastiques que depuis des années j'ai introduites en composition. Nous allons examiner une à une les composantes du son instrumental, qui sont indépendantes.

Les durées. Le temps (métrique) est considéré comme une ligne droite sur laquelle il s'agit de marquer des points correspondant aux variations des autres composantes. L'intervalle entre deux points s'identifie avec la durée. Parmi toutes les successions possibles de points, laquelle est à choisir ? Ainsi posée, la question n'a pas de sens.

On désigne une moyenne de points sur une longueur donnée. La question devient : étant donné cette moyenne de points, quel est le nombre des segments égaux à une longueur fixée à l'avance ?

La formule qui découle des raisonnements des probabilités continues et qui donne les probabilités pour toutes ces longueurs possibles lorsqu'on connaît la moyenne des points placés au hasard sur une droite est :

$$P_x = \delta e^{-\delta x} dx \qquad \text{(V. appendice 1)}$$

dans laquelle δ est la densité linéaire des points et x la longueur d'un segment quelconque.

Si maintenant nous faisons un choix de points et que nous le comparons à une distribution théorique obéissant à la loi précédente ou à une autre distribution quelconque, nous pouvons déduire la quantité de hasard inclus dans notre choix ou l'adaptation plus ou moins rigoureuse de notre choix à une loi de distribution qui peut même être absolument fonctionnelle. La comparaison est faite à l'aide de tests dont le plus usité est le critérium χ^2 de Pearson. Dans notre cas, où toutes les composantes du son sont mesurables en première approximation, nous utiliserons de plus le coefficient de corrélation. On sait que si le coefficient de corrélation de deux populations est $\pm$ 1, ces populations sont en relation fonctionnelle linéaire. Si ce coefficient est zéro, les deux populations sont indépendantes. Tous les degrés intermédiaires sont possibles, ce qui signifierait des liaisons plus ou moins étroites.

Nuages de sons

Supposons une durée donnée et un ensemble de sons ponctuels défini dans l'espace intensité-hauteur réalisé pendant cette durée. La densité superficielle moyenne de ce nuage de sons étant connue, quelles sont les probabilités d'avoir telle ou telle densité dans une région déterminée de l'espace intensité-hauteur ? La loi de Poisson répond à cette question :

$$P_\mu = \frac{\mu_0^{\mu}}{\mu!} e^{-\mu_0}$$

μ_0 est la densité moyenne, μ une densité quelconque, e la base des logarithmes népériens. Comme pour les durées, des comparaisons avec d'autres distributions de sons ponctuels peuvent façonner la loi à laquelle nous voulons que notre nuage obéisse.

Intensités, timbres, intervalles, etc.

Pour ces variables la loi la plus simple est :

$$\Theta(\gamma)\, d\gamma = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{\gamma}{a}\right) d\gamma \qquad \text{(V. appendice 1)}$$

qui donne la probabilité pour qu'un segment (intervalle d'intensité, mélodique, etc.), s, intérieur à un segment de longueur a, ait une longueur comprise entre γ et $\gamma + d\gamma$, pour $o \leqslant \gamma \leqslant a$.

Les vitesses

Nous venons de parler des sons ponctuels, granulaires, qui sont en réalité un cas particulier des sons à variation continue. Parmi ceux-ci considérons les glissandi. De toutes les formes possibles que peut prendre un son glissé, nous choisissons la plus simple, le glissement uniformément continu. Ce son glissé peut être assimilé sensoriellement et physiquement à la notion mathématique de vitesse. D'où une représentation vectorielle à une dimension, la grandeur scalaire du vecteur étant donnée par l'hypoténuse du triangle rectangle dont les deux autres côtés sont la durée et l'intervalle mélodique parcouru. Certaines opérations mathématiques sont donc permises avec les sons à variation continue ainsi définie. Les sons traditionnels des instruments à vent sont par exemple des cas particuliers où la vitesse est zéro. Un glissement vers les fréquences aiguës peut être défini comme positif, un autre vers les graves, négatif.

Nous allons faire les hypothèses logiques les plus simples qui nous conduiront à une formule mathématique de distribution des vitesses. Les raisonnements qui vont suivre sont en réalité un de ces « poèmes logiques » que l'intelligence humaine secrète pour prendre au piège les incohérences superficielles des phénomènes physiques et qui peuvent par ricochet lui servir de point de départ pour bâtir des Etres d'abord abstraits, puis des incarnations sonores ou lumineuses de ces Etres. C'est pour cela que je les donne en exemple.

Hypothèses d'homogénéité : [11]*.

1° La densité des sons animés de vitesses est constante. C'est-à-dire que deux régions d'égale étendue du spectre des fréquences contiennent le même nombre de sons mobiles (glissandi);

2° La valeur absolue des vitesses (glissandi ascendants ou descendants) est répartie uniformément. C'est-à-dire que la vitesse quadratique moyenne des sons mobiles est la même dans les différents registres;

3° Il y a isotropie, c'est-à-dire qu'il n'y a aucune direction privilégiée des mouvements des sons mobiles dans quelque registre que ce soit. Les ascendants et descendants sont en nombres égaux.

A partir de ces trois hypothèses de symétrie, nous pouvons définir la fonction f (v) de probabilité de la vitesse absolue v, (f(v) est la fréquence relative d'occurrence de la vitesse v).

Soit n le nombre de glissandi par unité de registre des fréquences (densité des sons mobiles), et r une étendue quelconque prise dans le registre. Alors le nombre de sons mobiles animés de vitesses comprises en grandeur entre v et v + dv et positives, est, d'après les hypothèses (1) et (3),

$$n.r.\frac{1}{2}f(v).dv \quad \left(\frac{1}{2} \text{ est la probabilité du signe } + \text{ ou } -\right)$$

D'après l'hypothèse (2) le nombre de sons mobiles animés en valeur absolue de la vitesse v est une fonction qui ne dépend que de v^2. Soit $g(v^2)$ cette fonction. Nous aurons alors l'égalité

$$n.r.\frac{1}{2}.f(v).dv = n.r.g(v^2).dv$$

D'autre part si $|\pm x| = v$, la loi de probabilité $g(v^2)$ sera égale à la loi de probabilité H de x, d'où :

$$g(v^2) = H(x) \text{ ou encore } \log g(v^2) = h(x)$$

(*) Les chiffres entre crochets correspondent aux chiffres bibliographiques en fin de volume.

Pour que h(x) ne dépende que de $x^2 = v^2$ il faut et il suffit que les différentielles,

d log $g(v^2) = h'(x).dx$ et $v.dv = x.dx$ aient un rapport constant :

$$\frac{d \log g(v^2)}{v.dv} = \frac{h'(x).dx}{x.dx} = \text{constant} = -2j$$

d'où $h'(x) = -2jx$ et $h(x) = -jx^2 + c$ et $h(x) = ke^{-j.x^2}$

Mais h(x) est une fonction de probabilités élémentaires, donc son intégrale de $-\infty$ à $+\infty$ doit être égale à 1; j est positif et $k = \frac{\sqrt{j}}{\sqrt{\pi}}$;

si $j = \frac{1}{a^2}$, on en déduit,

$$\frac{1}{2}.f(v) = g(v^2) = H(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-v^2/a^2} \quad \text{et} \quad f(v) = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} e^{-v^2/a^2}$$

pour $v = |\pm x|$, qui est une distribution gaussienne.

La chaîne de ces raisonnements a été faite d'après Maxwell qui avec Boltzmann a établi la Théorie cinétique des gaz. La fonction $f(v)$ donne la probabilité d'occurrence de la vitesse v, la constante a définissant la « température » de cette atmosphère sonore. La moyenne arithmétique de v est égale à $a/\sqrt{\pi}$ et l'écart type est $a/\sqrt{2}$. Nous donnons un exemple tiré de l'œuvre *Pithoprakta* pour orchestre à cordes, écrite en 1955-56 et créée par M. le Professeur Hermann Scherchen, à Munich, en mars 1957, (cf. *Wahrscheinlichkeitstheorie und Musik,* dans *Gravesaner Blätter,* n° 6). Le graphique représente un ensemble de vitesses de température proportionnelle à a = 35. En abcisse, figure le temps. Unité du temps : 5 cm = 26 MM. L'unité est subdivisée en trois, quatre et cinq parties égales qui permettent des durées différentielles très faibles. En ordonnées figurent les logarithmes binaires des fréquences. L'unité en est le demi-ton = 0,25 cm. A une tierce majeure correspond 1 cm de l'ordonnée. Chaque ligne brisée est attribuée à un instrument à cordes dont le nombre total est de 46. Chacune des droites représente une vitesse tirée du tableau de probabilités calculé avec la formule

$f(v) = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} e^{-v^2/a^2}$. Ont été calculées et tracées pour ce passage, de la mesure 52 à la mesure 60 d'une durée de 18,5 sec., un total de 1.148 vitesses distribuées suivant la loi de Gauss en 58 valeurs distinctes. La distribution étant gaussienne, la configuration macroscopique est une modulation plastique de la matière sonore. Le même passage a été transcrit en notation traditionnelle. Donc en résumé nous avons une pâte sonore dont :

1° les durées ne varient pas;
2° la masse des hauteurs est modulée librement;
3° la densité des sons à chaque instant est constante;
4° la dynamique est *ff* sans variation;
5° le timbre est constant;
6° les vitesses déterminent une « température » qui est soumise aux fluctuations locales. Leur distribution est gaussienne.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, nous pouvons établir entre les composantes des sons des liaisons plus ou moins étroites. Des cas possibles sont indiqués dans le même n° 6 des *Gravesaner Blätter*. Le coefficient le plus usité qui mesure le degré de corrélation entre deux variables x et y est :

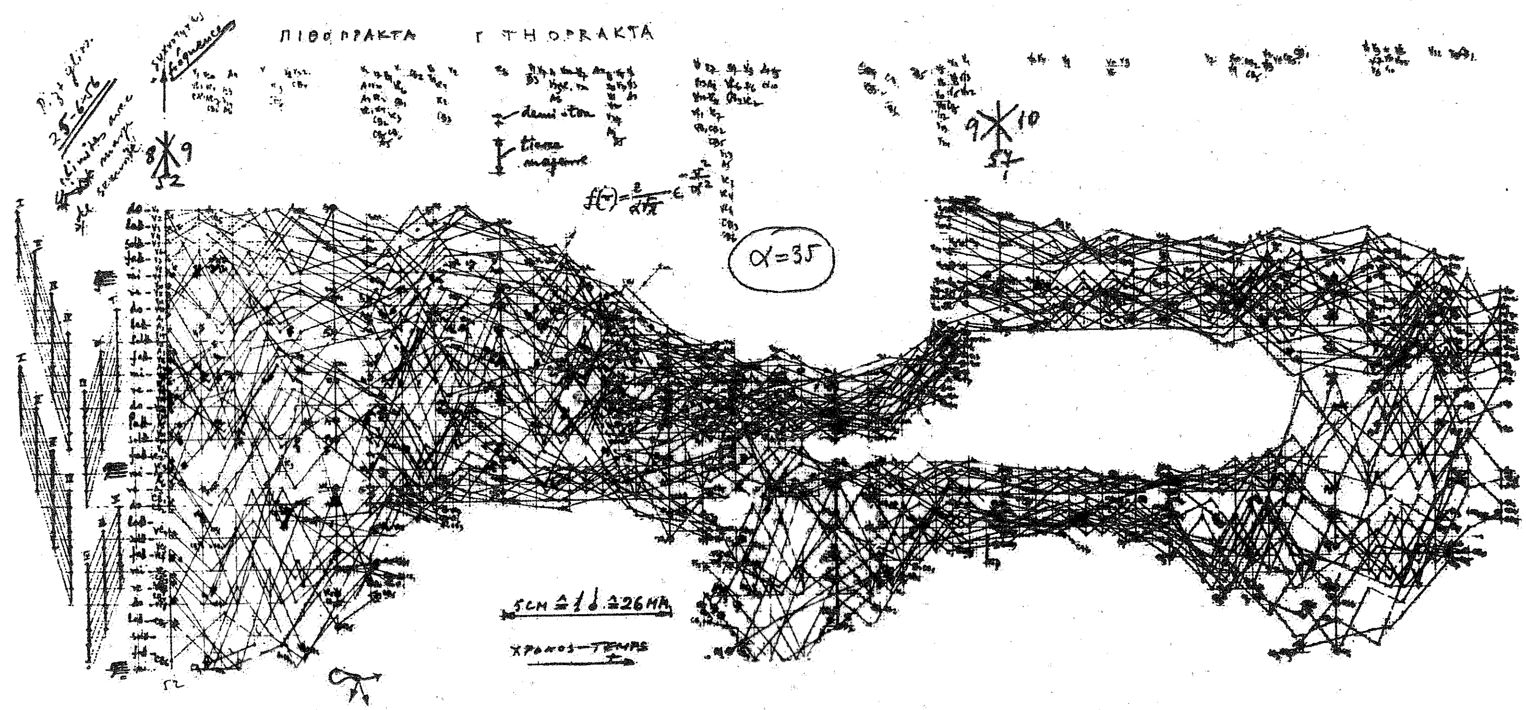
$$r = \frac{\Sigma (x-\bar{x})\ (y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma (x-\bar{x})^2} . \sqrt{\Sigma (y-\bar{y})^2}}$$

$\bar{x}$ et $\bar{y}$ étant la moyenne arithmétique des deux variables.

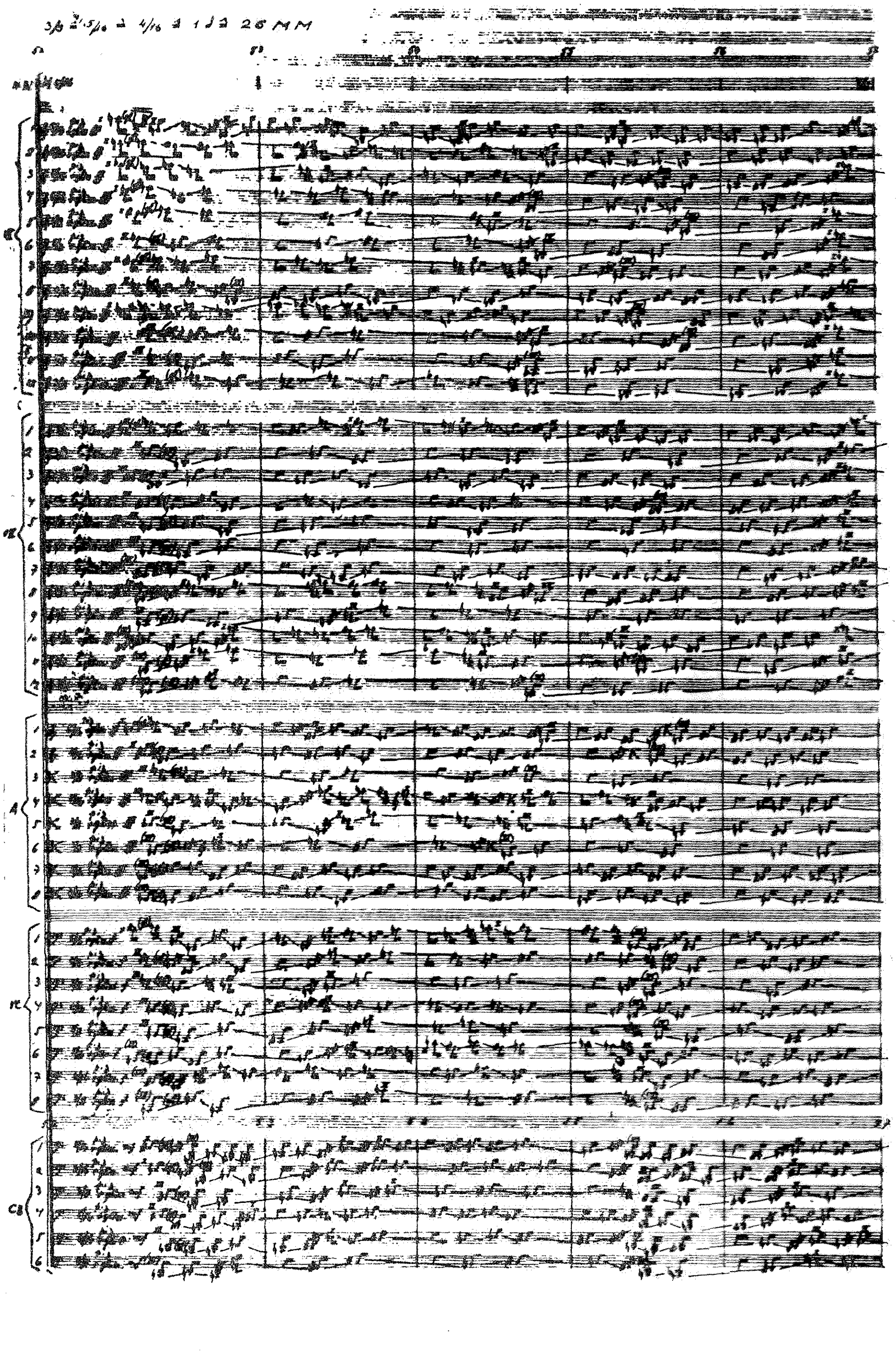
Voilà donc, en résumé, l'aspect technique d'un début d'utilisation de la théorie et du calcul des probabilités dans la composition musicale.

Avec ce qui précède, nous pouvons déjà contrôler :

a) Les transformations continues de grands ensembles de sons granulaires ou continus. En effet les densités, les durées, les registres, les vitesses, etc., peuvent être soumis aux lois des grands nombres avec les approximations nécessaires. Nous pouvons donc à l'aide des moyennes et des écarts donner des visages à ces ensembles et les faire évoluer dans différentes directions. La plus connue est celle qui va de l'ordre au désordre ou vice-versa. La notion de l'entropie y est introduite. Nous pouvons concevoir d'autres transformations continues. Par exemple un ensemble de sons pincés se transformant d'une façon continue en un ensemble de sons *arco*. Ou, en musique électromagnétique : passer d'une matière sonore à une autre matière, assurant ainsi une liaison organique entre les deux matières. Pour illustrer cette idée, je rappelle le sophisme grec de la calvitie : « Combien de cheveux faut-il enlever à un crâne chevelu pour qu'il devienne chauve ? » C'est un problème résolu par la théorie des probabilités avec l'écart-type, et connu sous le terme de *définition statistique;*



ΠΙΘΟΠΡΑΚΤΑ
ΓΤΗΟΡΑΚΤΑ
$\alpha = 35$
$f(v) = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}$
5CM ≙ 26 MM
ΧΡΟΝΟΣ—TEMPS



b) Une transformation peut être explosive lorsque les écarts de la moyenne deviennent brusquement exceptionnels;

c) Nous pouvons également confronter des faits hautement improbables avec les faits moyens;

d) Des atmosphères sonores très raréfiées peuvent être travaillées et contrôlées à l'aide de formules comme celles de Poisson. Ainsi, même une musique pour instrument solo peut être composée avec la stochastique.

Ces lois qu'on rencontre depuis peu dans une pléthore de domaines sont de véritables diamants de la pensée contemporaine. Elles régissent les lois de l'apparition de l'être et de son devenir. Pourtant il faut bien comprendre qu'elles ne sont pas un but, mais de merveilleux outils de confection, des garde-fous logiques.

Ici se place un retour de flammes. Cette fois, ce sont ces outils stochastiques qui vont poser une question fondamentale : « Quel est le minimum de contraintes logiques nécessaires à la fabrication d'un processus musical ? »

Auparavant, nous allons brièvement esquisser les phases de base de la fabrication d'une œuvre musicale.

Phases fondamentales d'une œuvre musicale

a) *Conceptions initiales* (intuitions, données provisoires ou définitives...).

b) *Définition d'êtres sonores* et de leur symbolique communicable dans la mesure du possible (sons d'instruments de musique, sons électroniques, bruits, ensembles d'éléments sonores ordonnés, constitutions granulaires ou continues, etc.).

c) *Définition des transformations* que ces êtres sonores doivent subir au cours de la composition (macrocomposition : choix général des charpentes logiques, c'est-à-dire des opérations élémentaires algébriques et mises en relation des êtres, des ensembles et de leurs symboles définis au point (b); et ordonnances des opérations précédentes dans le temps lexicographique, à l'aide de la succession et de la simultanéité).

d) *Microcomposition :* choix et fixation détaillée de la nature des relations fonctionnelles ou stochastiques, des éléments du point (b), c'est-à-dire : 1° algèbre hors-temps; 2° algèbre en-temps.

e) *Programmation séquentielle* des points (c) et (d) : schéma, *pattern* de l'œuvre dans l'ensemble.

f) *Effectuation des calculs,* des vérifications, des retours et des modifications définitives sur le programme séquentiel.

g) *Résultat final symbolique* de la programmation : partition de musique en notation traditionnelle, expressions numériques sur papier, graphiques, ou autres modes de solfège.

h) *Incarnation sonore* du programme : exécution orchestrale directe, manipulations du type des musiques électromagnétiques, fabrication mécanisée des êtres sonores et de leurs transformations.

En réalité l'ordre des phases de cette liste n'est pas rigide. Des permutations sont possibles au cours de l'élaboration d'une œuvre. La plupart du temps ces phases sont inconscientes et défectives. Pourtant cette liste fixe les idées et permet des spéculations sur l'avenir. En effet, les calculatrices électroniques (*computers*) pourront *prendre en mains* les phases (g) et (h) et même la (f). Mais en première approche, il semble que seules les phases (f) et (g) soient abordables. C'est-à-dire que le Résultat final symbolique pourra, tout au moins en France, être incarné seulement par un orchestre ou par des manipulations du type des musiques électromagnétiques sur magnétophones, et diffusées sur les chaînes électroacoustiques existantes, et non pas, comme il serait souhaitable, dans un avenir très proche, par une mécanisation poussée qui supprimerait les interprètes d'orchestre ou les magnétophones, et qui assumerait la fabrication mécanisée des êtres sonores et de leurs transformations.

Voici maintenant une réponse à la question précédente, valable pour une musique instrumentale, qui d'ailleurs peut s'appliquer à toute sorte d'émission des sons. Pour cela, nous reprenons les phases citées plus haut :

b) Définitions d'êtres sonores...

Les êtres sonores de l'orchestre classique peuvent, en première approximation, être représentés par des vecteurs à quatre variables, en général indépendantes, E_r (c,h,g,u) :

c_a .... = timbre ou famille d'instruments;
h_i .... = hauteur du son;
g_j .... = intensité du son, forme dynamique;
u_k .... = durée du son.

Le vecteur E_r définit un point M dans *l'espace affin* pourvu d'une *base* (c, h, g, u). Ce point M aura comme *coordonnées* les nombres c_a, h_i, g_j, u_k. Exemple : le do_3 du violon joué *arco* normal et *forte*, de la valeur d'une croche égale à 240 MM, pourra être représenté par la suite, $c_{\text{viol. archet}}$, $h_{39\ (= do_3)}$, $g_{4\ (= \text{forte})}$, $u_{5\ (= 1/4\ \text{sec})}$. Supposons que l'on classe, que l'on ordonne ces points M sur un axe orienté que nous nommerons axe des E_r. Supposons aussi que par son origine nous menions un autre axe orienté (t) formant, pour simplifier, un angle droit avec l'axe E_r. Nous représenterons sur cet axe nommé *axe du temps lexicographique* la succession lexicographique-temporelle des points M. Ainsi, nous venons de définir un espace à deux dimensions (E_r, t), de représentation commode. Ceci nous permettra de passer aux phases (c), définition des transformations..., et (d), microcomposition..., qui doivent contenir la réponse au problème posé du minimum de contraintes.

Pour cela, nous supposons que les points M définis plus haut peuvent apparaître sans aucune nécessité autre que celle d'obéir à une loi aléatoire sans mémoire. Cette hypothèse équivaut à dire que nous admettons une répartition stochastique des événements E_r dans l'espace (E_r, t). En admettant une répartition superficielle n assez faible nous entrons dans un domaine où la loi de Poisson est valable :

$$P_k = \frac{n^k}{K!} e^{-n}$$

D'autre part, nous pouvons considérer ce problème comme une synthèse de plusieurs processus stochastiques linéaires (loi des rayonnements des corps radioactifs), convenablement choisis (la seconde méthode est peut-être plus favorable à une mécanisation des transformations).

Un fragment suffisamment long de cette répartition constitue l'œuvre musicale. La loi de base définie plus haut engendre toute une famille d'œuvres en fonction de la densité superficielle. Nous avons donc bien un archétype formel d'œuvre dont le souci de base est d'atteindre la *dissymétrie* (au sens étymologique) *la plus grande*, le *minimum de contraintes, de causalités, de règles.* Nous pensons que à partir de cet archétype peut-être le plus général, nous pouvons redescendre l'échelle des formes en introduisant des contraintes progressivement nombreuses, c'est-à-dire des choix, des restrictions, des *non.* Dans l'analyse en plusieurs processus linéaires, nous pouvons aussi admettre d'autres processus; de Wiener-Lévy, des infiniment divisibles de P. Lévy, Markoviens, etc., ou des mélanges. C'est ce qui rend cette deuxième méthode de distribution plus féconde.

L'exploration des bornes a et b de cet archétype, $a \leqslant n \leqslant b$, sont également intéressantes, mais sur un autre plan, celui de la comparaison mutuelle des échantillons. En effet, ceci implique une gradation des accroissements de n pour que les différences entre les familles n_i soient reconnaissables. Des remarques analogues sont valables dans le cas d'autres processus linéaires.

Si nous optons pour un processus de Poisson, deux sont les hypothèses nécessaires qui répondent à la question du minimum des contraintes :

1° Il existe, dans un espace donné, des instruments de musique et des hommes;

2° Il existe des modes de contacts entre ces hommes et ces instruments qui permettent l'émission d'événements sonores rares.

C'est tout comme hypothèses (*). A partir de ces deux contraintes, et à l'aide de la stochastique, toute une œuvre a été bâtie sans admettre aucune autre restriction. Elle a été créée par le Professeur Hermann Scherchen en 1958 à Buenos-Aires; c'est *Achorripsis* pour 21 instruments, composée en 1956/57. (Cf. « A la recherche d'une musique stochastique », dans *Gravesaner Blätter*, n° 11/12.)

Nous donnons ici un extrait de cet article.

τὸ γὰρ αὐτὸ νοεῖν ἐστίν τε καὶ εἶναι

τὸ γὰρ αὐτὸ εἶναι ἐστίν τε καὶ οὐκ εἶναι

Ontologie :

Dans un Univers de Vide. Un bref train d'ondes dont fin et début coïncident (Temps néant), se déclenchant à perpétuité.

Le Rien résorbe, crée.

Il est générateur de l'Etre.

Temps, Causalité.

Ces événements sonores rares peuvent être autres que des sons isolés. Ils peuvent être soit des figures mélodiques, soit des structures cellulaires, soit des agglomérations dont les caractéristiques sont également régies par les lois du hasard; par exemple : des nuages de sons ponctuels, des températures de vitesse (**), etc. De toute manière ils forment un échantillon d'une succession d'événements sonores rares.

On peut représenter cet échantillon soit à l'aide d'un simple tableau de probabilités, soit entre autres à l'aide d'un tableau à double entrée, une matrice, dont les cases seraient remplies par les fréquences des événements. Les lignes seraient constituées suivant des qualifications particulières des événements et les colonnes par des dates (voir matrice (M).

La distribution des fréquences dans cette matrice est faite d'après la formule de Poisson qui est la loi des apparitions des événements rares, au hasard.

Nous devons préciser davantage le sens d'une telle distribution et la manière avec laquelle nous la réalisons.

(*) Confronter avec l'ἔκκλισις (clinamen) d'Epicure.

(**) Voir Gravesaner Blätter n° 6.

Il y a avantage à définir le hasard comme une loi esthétique, comme une philosophie normale. Le hasard est la limite de la notion de la symétrie qui évolue. La symétrie tend à la dissymétrie qui équivaut dans ce sens à la négation des cadres hérités d'une tradition, négation qui agit non seulement dans les détails mais surtout dans la composition des structures. Voir tendances en peinture, sculpture, architecture et dans d'autres domaines de la pensée. Par exemple : en architecture, les cadres élaborés à l'aide des tracés régulateurs sont brouillés et dynamisés par des événements exceptionnels. Tout se passe comme s'il y avait des oscillations biunivoques entre la symétrie, l'ordre, le rationnel, et la dissymétrie, le désordre, l'irrationnel et ceci dans les réactions entre les époques des civilisations.

A l'origine d'une transformation vers la dissymétrie, des événements exceptionnels sont introduits dans la symétrie et jouent le rôle d'aiguillon esthétique. Lorsque ces événements exceptionnels se multiplient et se généralisent il se produit un bond sur un niveau supérieur. C'est celui du désordre qui, dans les arts tout au moins, et dans les expressions des artistes se proclame enfanté par la vision complexe vaste et riche des rencontres brutales de la vie moderne. La peinture abstraite, décorative, le tachisme, etc., en sont des témoignages. Le hasard par conséquent, que nous côtoyons consciemment à tous les pas quotidiens, n'est qu'un état extrême de ce désordre contrôlé (ce qui signifie, richesse ou pauvreté des connexions entre les éléments et qui engendrent la dépendance ou l'indépendance des transformations) et à ce titre, par la négation, jouit des propriétés bienfaisantes de régulateur esthétique. Régulateur aussi des événements sonores, de leur apparition et de leur vie. Mais, et c'est là qu'intervient la logique de fer des lois du hasard, ce hasard ne peut être créé sans soumission totale à ses propres lois. A cette condition, le hasard maté par sa propre vertu devient torrent hydroélectrique.

Attention ! On ne parle pas ici des cas où l'on se borne à jouer à pile ou face pour choisir telle ou telle alternative de détail. La question est bien plus grave. Il s'agit ici d'un concept philosophique et esthétique régi par les lois de la théorie des probabilités et par les fonctions mathématiques qui les formulent, d'un concept cohérent dans un domaine nouveau de cohérence.

Pour la commodité du calcul nous choisissons a priori une densité moyenne d'événements

$$\lambda = 0{,}60 \; \frac{\text{événements}}{\text{unité}}$$

En appliquant la formule de Poisson

$$P_k = \frac{\lambda^k}{K!} e^{-\lambda}$$

nous obtenons le tableau des probabilités (*) :

$$\begin{aligned} P_0 &= 0{,}5488 \\ P_1 &= 0{,}3293 \\ P_2 &= 0{,}0988 \\ P_3 &= 0{,}0198 \\ P_4 &= 0{,}0029 \\ P_5 &= 0{,}0000 \end{aligned} \qquad (1)$$

P_i = probabilité pour que l'événement survienne i fois dans l'unité de volume, ou de temps, ou etc. En choisissant a priori 196 unités ou cases, la répartition des fréquences parmi les cases est obtenue en multipliant les P_i par 196.

TABLEAU 2

i	Nombre de cases $196 \times P_i$
0	107
1	65
2	19
3	4
4	1

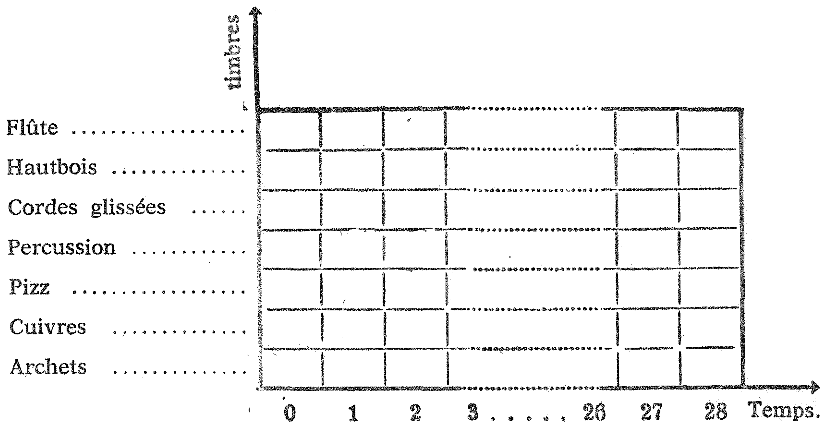
(2)

Les 196 cases peuvent être constituées par un ou par plusieurs groupes qualifiés de cases. Ici les groupes seront qualifiés à l'aide du timbre et du temps, de façon que : groupe des timbres $\times$ groupe des dates = 196 cases. Soit, sept timbres distincts :

$$\frac{196}{7} = 28 \text{ unités de temps}$$

(*) L'analyse qui suit est tirée d'Achorripsis, œuvre pour 21 instruments de I. Xenakis, éditée par Bote und Bock, Berlin.

Ainsi les 196 cases sont réparties sur un espace à deux dimensions :



(3)

Si l'œuvre-échantillon doit durer 7 minutes (choix subjectif) l'unité de temps U_t sera égale à 15 sec. et chaque U_t contiendra 6,5 mesures 26 du Métronome Maëlzel (26 MM).

De quelle manière répartir dans l'espace à deux dimensions figuré par la matrice (3), les fréquences des événements zéros, simples, doubles, triples, quadruples ?

La réponse la plus immédiate est de considérer les 28 colonnes comme des cases, et de distribuer successivement les événements zéros, simples, doubles, triples, quadruples du tableau (2) dans ces 28 cases nouvelles. Prenons en exemple l'événement simple qui doit d'après le tableau (2) se produire 65 fois. Tout se passe comme si on devait distribuer des événements dans des cases avec une densité moyenne :

$$\lambda = \frac{65}{28} = 2{,}32, \text{ événements simples par case } (= \text{colonne}).$$

En appliquant à nouveau la formule Poisson avec la densité moyenne $\lambda = 2{,}32$ ($2{,}32 \ll 30$), nous obtenons le tableau (4).

On pourrait choisir n'importe quelle autre distribution à condition que la somme totale des événements simples soit égale à 65. Le tableau (5) montre une telle distribution.

TABLEAU DE DISTRIBUTION POISSON

Fréquence K	Nombre de colonnes	Produit col. x K
0	3	0
1	6	6
2	8	16
3	5	15
4	3	12
5	2	10
6	1	6
7	0	0
Totaux	28	65

(4)

TABLEAU DE DISTRIBUTION ARBITRAIRE

Fréquence K	Nombre de colonnes	Produit col. x K
0	10	0
1	3	3
2	0	0
3	9	27
4	0	0
5	1	5
6	5	30
7	0	0
Totaux	28	65

(5)

Mais dans cette recherche axiomatique, où le hasard doit baigner totalement l'espace sonore il nous faut rejeter toute distribution qui s'écarte de la loi de Poisson (tableau 4). Et la distribution Poisson doit être effective non seulement suivant les colonnes mais aussi suivant les lignes de la matrice. Même raisonnement pour les diagonales, etc.

En ne nous contentant que des lignes et des colonnes, nous obtenons une distribution homogène qui suit Poisson. C'est de cette façon qu'ont été calculées les répartitions dans les lignes et dans les colonnes de la matrice (M).

Donc une loi *unique* de hasard, la loi de Poisson (événements rares), par l'intermédiaire de la moyenne arbitraire λ est susceptible de conditionner d'une part globalement une matrice-échantillon et d'autre part les distributions partielles suivant les lignes et les colonnes. Le choix a priori, arbitraire, admis à l'origine, concerne donc les variables suivantes du « vecteur-matrice » :

Variables ou entrées du « vecteur-matrice »

a) Loi de Poisson.

b) La moyenne λ.

c) Le nombre des cases, des lignes et des colonnes.

Les répartitions inscrites dans cette matrice ne sont pas toujours rigoureusement définies. Elles dépendent, en effet, pour un λ donné du nombre des lignes ou des colonnes. Plus le nombre des lignes ou des colonnes est grand, plus la définition est rigoureuse. C'est la loi des grands nombres. Mais cet indéterminisme permet un libre arbitre au gré de l'inspiration artistique. Il constitue une deuxième porte ouverte au subjectivisme du compositeur. La première étant « l'état d'entrée » du « vecteur-matrice » défini ci-dessus.

Maintenant, il nous faut préciser l'événement unitaire dont les fréquences ont été réglées dans la matrice-type (M). Nous allons prendre comme événement simple un nuage de sons de densité linéaire δ sons par sec.

Un orchestre normal peut encore jouer 10 sons/sec. Nous choisissons $\delta = 5$ sons par mesure 26 MM soit : $\delta = 2{,}2$ sons/sec. $(\triangleq \frac{10}{4})$.

Nous établissons maintenant la correspondance suivante :

Evénement	Nuage de densité δ =		Moyenne de sons par case (15 sec.)
	Sons par mesure 26 MM	Sons par seconde	
zero	0	0	0
simple	5	2.2	32.5
double	10	4.4	65
triple	15	6.6	97.5
quadruple	20	8.8	130

Les hachures de la matrice (M) montrent une distribution Poisson des fréquences, homogène et vérifiée dans le sens des colonnes et des lignes. Nous remarquons que les lignes sont interchangeables (= timbres interchangeables). Les colonnes le sont également. Ceci nous conduit à admettre que le déterminisme de cette matrice est faible en partie et qu'en réalité elle sert surtout de cadre à la pensée. A une pensée qui manipule des fréquences d'événements de toutes natures. C'est en cela que consiste le véritable travail de plastique sonore, à distribuer les nuages dans l'espace à deux dimensions de la matrice. Prévoir toutes les rencontres sonores a priori avant les calculs de détails, en éliminant les positions nuisibles. C'est un travail de recherche patiente qui met en exploitation instantanément toutes les facultés créatrices. Cette matrice est comme un jeu d'échecs à un seul joueur, qui doit suivre certaines règles de jeu, pour un gain dont lui seul est juge. Cette matrice de jeux n'a pas de stratégie unique. Il n'est même pas possible d'en dégager des buts pondérés. Elle est très générale et incalculable par le raisonnement pur.

Jusqu'ici nous avons placé les densités des nuages dans la matrice. Maintenant il nous faut, à l'aide du calcul, procéder à la coordination des éléments sonores aléatoires.

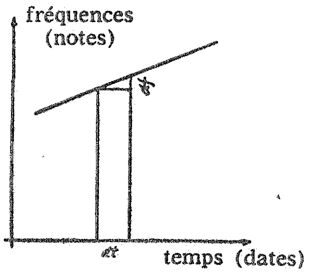
Analysons à titre d'exemple la case III — ι Z' de la matrice. III^e ligne : sons à variation continue (glissandi des cordes), dix-septième unité de temps (mesures 103 à 111).

La densité des sons est de 4,5 sons par mesure métronomique 26 MM, ($\delta = 4{,}5$) donc 4,5 sons par mesure $\times$ 6,5 mesures = 29 sons pour cette case.

Comment placer les 29 sons glissés dans cette case ?

Hypothèses de calcul

1re hypothèse. — La caractéristique acoustique du son glissé est assimilée à la vitesse $v = \dfrac{df}{dt}$ d'un mouvement uniformément continu.



2^e hypothèse. — La moyenne quadratique α de toutes les valeurs possibles de v, est proportionelle à la densité sonore δ. Dans ce cas $\alpha = 3{,}38$ (température).

3^e hypothèse. — Les valeurs de ces vitesses sont distribuées suivant la dissymétrie la plus totale (au hasard). Cette distribution suivra la loi de Gauss. La probabilité f (v) d'existence de la vitesse v est donnée par la fonction :

$$f(v) = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}}$$

et la probabilité $P(\lambda)$ pour que v soit compris entre v_1 et v_2, par la fonction :

$$P(\lambda) = \Theta(\lambda_2) - \Theta(\lambda_1) \quad \text{dans laquelle}$$

$$\lambda_i = \frac{v_i}{a} \quad \text{et} \quad \Theta(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\lambda} e^{-\lambda^2} d\lambda \qquad \text{(loi normale)}$$

4[e] *hypothèse.* — Un son glissé est essentiellement caractérisé par :

a) Sa date de départ;

b) Sa vitesse; $v_m = \frac{df}{dt} \ (v_1 < v_m < v_2)$,

c) Son registre.

5[e] *hypothèse.* — Nous assimilons le temps à une droite et chaque date de départ à un point sur cette droite. Tout se passe comme si on devait distribuer un nombre de points sur une droite avec une densité linéaire $\delta = 4{,}5$ points par mesure métronomique 26 MM. C'est un problème de probabilités continues. Ces points définissent des segments et la probabilité pour que le i ième segment ait une longueur x_i comprise entre x et x + dx est :

$$P_x = \delta \cdot e^{-\delta x} dx. \qquad \text{(v. appendice 1)}$$

6[e] *hypothèse.* — La date de départ correspond à un son. Nous essayerons de définir sa hauteur. Les cordes ont une étendue de 80 demi-tons environ. On peut assimiler cette étendue à une droite de longueur, a = 80 demi-tons.

Puisque entre deux glissandis successifs ou simultanés, il y a création d'un intervalle aux dates de départ, on peut définir non plus la note d'attaque d'un glissando mais l'intervalle mélodique qui sépare les deux origines.

Ainsi posé, le problème consiste à trouver la probabilité pour qu'un segment s, intérieur à un segment de droite de longueur a, ait une longueur comprise entre j et j + dj ($o \leqslant j \leqslant a$).

Cette probabilité est donnée par la formule :

$$\Theta(j) \quad dj = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{j}{a}\right) \cdot dj. \qquad \text{(V. appendice 1)}$$

7[e] *hypothèse.* — Les trois caractères essentiels du son glissé défini dans la 4[e] hypothèse sont indépendants.

A partir de ces hypothèses, nous pouvons dresser les trois tables de probabilités :

a) Table des durées;

b) Table des vitesses;

c) Table des intervalles.

Table des durées

$\delta = 4{,}5$ sons par mesure 26 MM.

Unité $x = 0{,}10$ de la mesure 26 MM.

$4{,}5.6{,}5 = 29$ sons par case soit, 28 durées.

x	δx	$e^{-\delta x_i}$	$\delta e^{-\delta x}$	$\delta e^{-\delta x} dx$	$P_x \cdot 28$
0,00	0,00	1,000	4,500	0,362	10
0,10	0,45	0,638	2,870	0,231	7
0,20	0,90	0,407	1,830	0,148	4
0,30	1,35	0,259	1,165	0,094	3
0,40	1,80	0,165	0,743	0,060	2
0,50	2,25	0,105	0,473	0,038	1
0,60	2,70	0,067	0,302	0,024	1
0,70	3,15	0,043	0,194	0,016	0
Totaux			12,415	0,973	28

(a)

On approxime en considérant dx comme facteur constant.

$$\sum_0^{\infty} \delta e^{-\delta x}\, dx = 1 \qquad \text{donc} \qquad dx = \frac{1}{\sum_0^{\infty} \delta e^{-\delta x}\, dx}.$$

ici $dx = \frac{1}{12,415} = 0{,}805$

TABLE DES VITESSES

$\delta = 4{,}5$ sons glissés par mesure 26 MM

$\alpha = 3{,}88$ moyenne quadratique des vitesses

v est exprimé en demi-tons par mesure 26 MM

v_m est la vitesse moyenne $\dfrac{v_1 + v_2}{2}$.

4,5.6,5 = 29 sons glissés par case.

v	$\lambda = \dfrac{v}{\alpha}$	$\Theta\,(\lambda)$	$P(\lambda) = \Theta(\lambda_2) - \Theta(\lambda_1)$	$P(\lambda)$ 29	v_m
0	0,000	0,0000			
			0,2869	9	0,5
1	0,258	0,2869			
			0,2510	7	1,5
2	0,516	0,5379			
			0,1859	5	2,5
3	0,773	0,7238			
			0,1310	4	3,5
4	1,032	0,8548			
			0,0771	2	4,5
5	1,228	0,9319			
			0,0397	1	5,5
6	1,545	0,9716			
			0,0179	1	6,5
7	1,805	0,9895			
			0,0071	0	7,5

(b)

TABLE DES INTERVALLES

$\delta = 4{,}5$ sons glissés par mesure 26 MM.
a = 80 demi-tons soit 18 fois l'unité arbitraire de 4,5 demi-tons.
j sera exprimé en multiples de 4,5 demi-tons.

dj est supposé constant. Donc $dj = \dfrac{1}{\Sigma\Theta(j)}$ ou

$dj = \dfrac{a}{a+1}$ et la fonction est linéaire.

Pour $j = 0$ $\quad \Theta(j).dj = \dfrac{2}{a+1} = 0{,}105$; pour $j = 18$ $\quad \Theta(j).dj = 0.$
$4{,}5.6{,}5 = 29$ sons glissés par case.

Nous pouvons construire la table des probabilités à l'aide d'une droite.

j	$\Theta(j) \cdot dj = P(j)$	$P(j) \cdot 29$
C	0.105	3
1		3
2		3
3		3
4		2
5		2
6		2
7		2
8		2
9		2
10		1
11		1
12		1
13		1
14		1
15		0
16		0
17		0
18		0

(c)

Elles nous fournissent les éléments qui matérialisent la case III — ιZ'. Nous prions le lecteur de bien vouloir examiner sur partition l'usage fait des données du calcul. Ici aussi nous pouvons constater qu'une grande liberté du choix de l'ordre est donnée au compositeur. Les restrictions sont d'ordre général canalisatrices plutôt qu'impérieuses. Ce sont des tendances de l'être sonore que la théorie et le calcul définissent et non pas un esclavage. Les formules mathématiques sont ainsi apprivoisées et asservies par la pensée musicale.

Nous avons donné cet exemple des sons glissés car il contient tous les problèmes de cette musique stochastique contrôlée par le calcul (jusqu'à un certain point).

Nous ne parlerons pas des moyens de vérification des liaisons et des corrélations entre les diverses grandeurs utilisées. Ce serait trop long, complexe et fastidieux. Qu'il nous soit permis, pour l'instant, d'affirmer que la construction de la matrice de base a été vérifiée par les deux formules :

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2 \cdot \Sigma(y-\bar{y})^2}},$$

$$z = \frac{1}{2} \lg \frac{1+r}{1-r}.$$

Imaginons maintenant la musique composée à l'aide de cette matrice (M). Un observateur qui percevrait les fréquences des événements de l'échantillon musical, concluerait à une répartition due au hasard et qui suivrait des lois de probabilités.

Là se pose une question.

Cette musique réentendue suffisamment de fois conservera-t-elle toujours son effet de surprise ? Ne se transformerait-elle pas plutôt en un ensemble de phénomènes *prévisibles* par le fait de la mémoire, malgré que la loi des fréquences soit issue des lois du hasard ?

Effectivement, seulement à la première audition les données pourront paraître aléatoires. Puis, pendant les réauditions successives, les rapports de force entre les événements de l'échantillon disposés au « hasard », formeront un réseau qui prendra un sens défini dans l'esprit de l'auditeur et amorceront une « logique » spéciale, une cohésion nouvelle capable de satisfaire son intellect aussi bien que son esthétique. (Si, bien entendu, l'artiste a une certaine étoffe.)

Si, par contre, nous voulons que l'échantillon soit toujours imprévisible, il est possible de supposer qu'à chaque répétition de l'échantillon, certaines données soient transformées de façon que leurs écarts aux fréquences théoriques ne soient pas significatifs. Peut-être qu'une programmation valable pour une première-deuxième-troisième, etc., exécution donnera des échantillons aléatoires, mais non identiques dans le sens absolu, et dont les écarts seront également distribués au hasard.

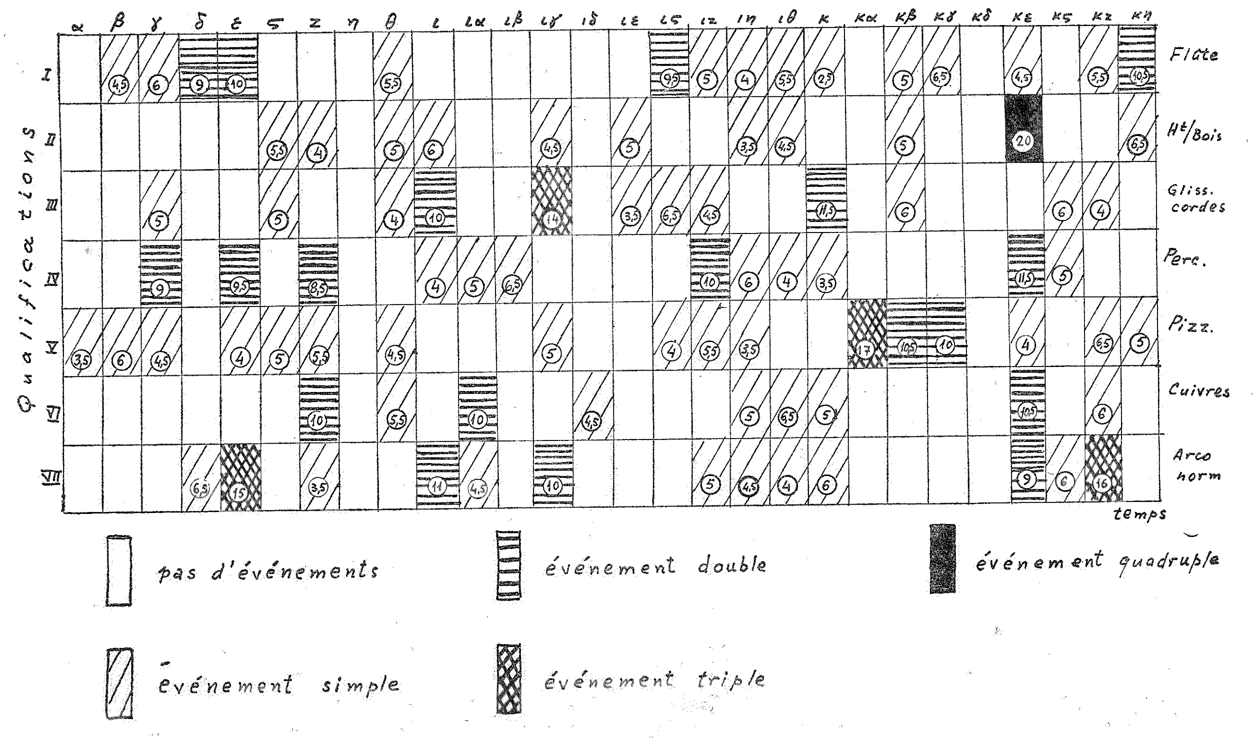
Ou bien alors, un système avec des ordinateurs électroniques à mémoire qui permettrait la variation des paramètres d'entrée de la matrice et des nuages sous certaines conditions. Il surgirait ainsi une musique déformable dans le temps, qui pour n exécutions donnera au même observateur n résultats paraissant dus au hasard, c'est-à-dire suivant longtemps les lois de probabilités, mais *statistiquement* identiques à eux-mêmes, l'identité étant une fois pour toutes définie à l'aide du « vecteur-matrice ».

Le Schème-Sonore défini sous cette forme de « vecteur-matrice », est susceptible, par conséquent, de fonder une Régulation plus ou moins autodéterminée des phénomènes sonores rares, compris dans un échantillon-composition musical; il représente une attitude compositionnelle, un comportement fondamentalement Stochastique, une unité d'ordre supérieur.

IANNIS XENAKIS
1956-1957

VECTEUR-MATRICE M

MATRICE D' ACHORRIPSIS




Picc.
Klar. Es
Baßkl. B
Xyl.
H.-Bl.
gr.Tr.
1
Vl. 2
3
1
Vcl. 2
3
1
Kb. 2
3


110
Picc.
Ob.
Klar. Es
Baßkl. B
Trpt. 1
Xyl.
H.-Bl.
gr.Tr.
Vl.
Vcl.
Kb.
(pizz.)
(pizz.)
(pizz.)

Si les premiers pas pouvaient se résumer par le processus vision →règles →œuvres, la question du minimum a produit un chemin inverse, règles →vision. Effectivement la stochastique permet une vision philosophique, ainsi que l'exemple d'*Achorripsis* en fait foi.

HASARD-IMPROVISATION

Avant de généraliser davantage l'essence de la composition musicale, il nous faut parler du principe d'improvisation qui fait fureur chez les néo-sériels et qui leur donne le droit, pensent-ils, de parler de hasard, d'aléatoire, qu'ils introduisent ainsi en musique. Ils écrivent d'abord des partitions dans lesquelles certaines combinaisons de sons sont choisies librement par l'interprète. Il est évident que ces compositeurs considèrent les divers circuits possibles comme équivalents. Or, deux infirmités logiques sont à mettre en évidence qui leur enlève le droit de parler de hasard d'une part et de « composition » de l'autre (composition au sens large bien entendu) :

a) L'interprète est un être fortement conditionné, on ne peut donc admettre la thèse du choix inconditionnel, de l'interprète-roulette. Les martingales de Monte-Carlo et la procession des suicidés devraient convaincre quiconque, une fois pour toutes; nous y reviendrons;

b) Le compositeur fait acte de démission lorsqu'il admet plusieurs circuits possibles et équivalents. Au nom du schème, on trahit le problème du choix, et c'est l'interprète qui est promu au rang de compositeur par le compositeur lui-même. Il y a donc substitution d'auteurs.

Le prolongement extrémiste de cette attitude est celle qui utilise des signes graphiques quelconques sur un papier que l'interprète lit en improvisant le tout. Les deux infirmités précédentes sont ici terriblement grossies. J'aimerais poser une question : supposons ce papier placé en face d'un interprète, incomparable spécialiste de Chopin. Le résultat ne serait-il pas modulé par le style et l'écriture de Chopin à la manière récente qu'on avait de jouer les cadences libres des concertos ? Donc, du point de vue compositeur, sans intérêt.

Au contraire, il y aurait deux conclusions à tirer : la première, c'est que la musique sérielle s'est suffisamment *banalisée* pour pouvoir être improvisée comme celle de Chopin, ce qui confirme l'impression générale; la deuxième étant que le compositeur démissionne totalement de son rôle, il n'a rien à dire, et son rôle peut être repris par des peintres ou par des glyphes cunéiformes.

Le hasard se calcule

Pour terminer avec la thèse du musicien-roulette, j'ajoute ceci : le hasard est une chose rare, un traquenard, on peut le construire jusqu'à un certain point, très difficilement, à l'aide de raisonnements complexes qui se résument par des formules mathématiques; on peut le construire un peu, mais jamais l'improviser ou l'imiter mentalement. Je renvoie à la démonstration de l'impossibilité d'imiter le hasard, faite par le grand mathématicien Emile Borel, qui fut l'un des spécialistes du calcul des probabilités. A moins... de jouer les sons aux dés, activité vraiment trop simpliste ! Mais dès que l'on sort de ce champ primaire du hasard, indigne d'un musicien, le calcul de l'aléatoire, c'est-à-dire la stochastique, garantit d'abord, dans un domaine de définition précis, des bévues à ne pas commettre et ensuite, fournit un moyen puissant de raisonnement et d'enrichissement des processus sonores.

PEINTURE STOCHASTIQUE ?

Dans cet ordre d'idées, Michel Philippot a introduit dans sa peinture, depuis des années déjà, le calcul des probabilités, ouvrant ainsi dans ce domaine artistique des nouvelles directions d'investigation. En musique il s'est récemment efforcé à analyser les actes compositionnels sous forme d'*Organigramme* pour une *Machine imaginaire.* C'est une analyse fondamentale du choix volontaire, qui aboutit à une chaîne d'événements aléatoires ou déterministes avec à l'appui une œuvre intitulée *Composition pour double orchestre* (1960). Le terme de *Machine imaginaire* signifie qu'à l'exemple des calculatrices électroniques, le compositeur peut définir rigoureusement les êtres et les modes opératoires.

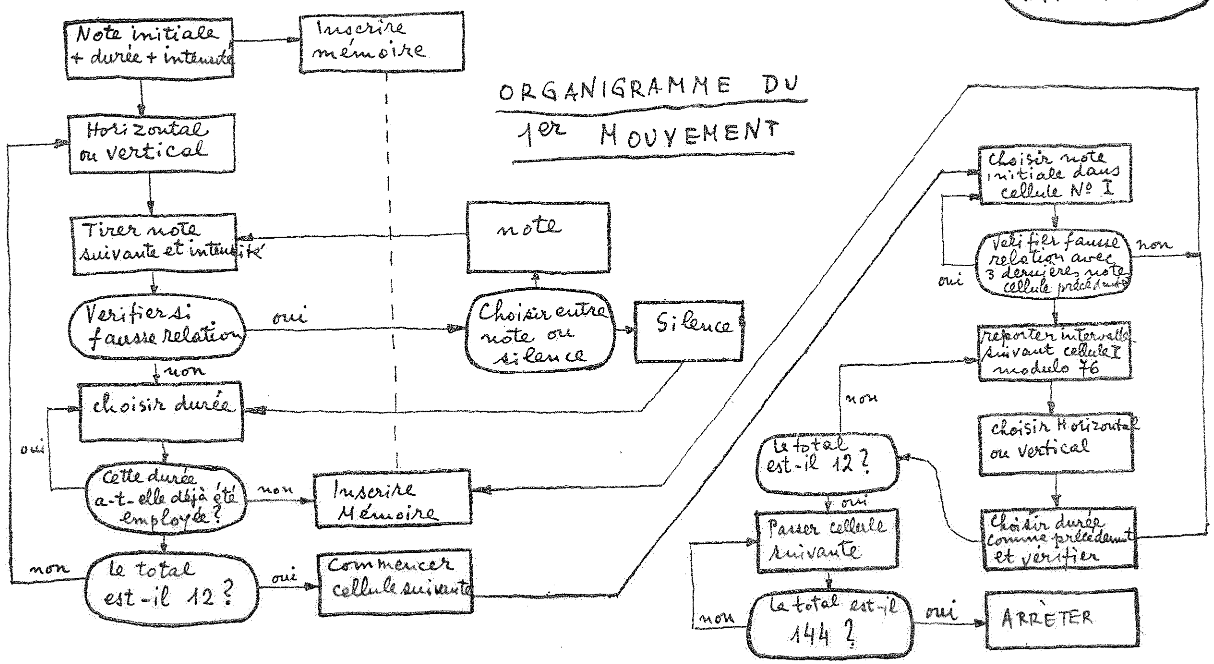
Voici le commentaire de Michel Philippot sur sa *composition pour double orchestre :*

Si, à propos de cette œuvre, il a pu m'arriver d'employer l'expression « musique expérimentale », il convient de préciser le sens que, dans ce cas particulier, il avait été dans mon intention de lui attribuer. Il ne s'agit en rien d'une musique concrète ou électronique, mais d'une très banale partition écrite sur l'habituel papier réglé et ne requérant l'utilisation que des instruments d'orchestre les plus traditionnels. L'expérience existe cependant dont cette « composition » est, en quelque sorte le « sous-produit » (*).

(*) On sait que beaucoup d'industries ne vivent d'ailleurs que de l'exploitation de leurs sous-produits.

COMPOSITION POUR DOUBLE ORCHESTRE de MICHEL PHILIPPOT

ORGANIGRAMME DU 1er MOUVEMENT



Le but recherché était seulement d'effectuer, à l'occasion de l'élaboration d'une œuvre que j'aurais écrite indépendamment de toute volonté expérimentale, une exploration du processus suivi par mon propre mécanisme cérébral dans son activité d'agencement des éléments sonores.

La démarche à laquelle j'ai eu recours a donc été la suivante :

1 - faire l'inventaire aussi complet que possible de l'ensemble des gestes, des idées, des manies, des décisions, des choix, etc., qui étaient les miens quand j'écrivais de la musique;

2 - réduire cet ensemble à une suite de décisions simples, si possible binaires, c'est-à-dire accepter ou refuser telle note, telle durée, tel silence, etc., dans une situation déterminée et définie par le contexte d'une part, le conditionnement auquel j'étais soumis et mes goûts personnels, d'autre part;

3 - établir, de cette suite de décisions simples, un programme si possible ordonné suivant les deux considérations suivantes (parfois contradictoires) qui étaient, en premier lieu, la manière dont ces décisions émergeaient de mon imagination durant le travail et, en second lieu, la manière dont elles auraient dû émerger pour être utilisables au mieux de leurs possibilités;

4 - présenter ce programme sous la forme d'un organigramme contenant l'enchaînement logique de ces décisions et dont le fonctionnement pouvait être facilement contrôlé;

5 - mettre en marche un mécanisme de simulation en respectant la règle du jeu de l'organigramme et noter le résultat;

6 - confronter ce résultat avec mes intentions musicales;

7 - recenser les divergences entre le résultat et les intentions, détecter leurs causes, corriger les règles opératoires;

8 - apporter ces corrections à la séquence des phases expérimentales, c'est-à-dire, recommencer au 1 jusqu'à obtention d'un résultat satisfaisant.

Si nous nous en tenons aux considérations les plus générales, il s'agissait donc, tout simplement, de procéder à une analyse de la complexité considérée comme une accumulation, en un certain ordre d'éléments simples et de reconstruire ensuite cette complexité en vérifiant à la fois la nature des éléments et leurs règles d'assemblage. La simple vision de l'organigramme du premier mouvement précise assez bien la méthode employée par le survol qu'il en permet d'un seul coup d'œil. Mais, s'en tenir à ce seul premier mouvement serait méconnaître l'essentiel de la composition musicale.

En effet, le caractère de « prélude » qui ressort de cet assemblage de notes (constituants élémentaires de l'orchestre) doit nous faire penser au fait que la composition, dans son étape ultime, est aussi un assemblage de groupes de notes, motifs ou thèmes, et de leurs transformations. Par conséquent, la tâche dévoilée par les organigrammes des mouvements suivants devait mettre en évidence un agencement d'un ordre supérieur dans lequel les données du premier mouvement étaient utilisées comme une sorte de matériel « préfabriqué ». Ainsi apparaissait ce phénomène, d'ailleurs assez banal, d'auto-génération de la complexité par juxtaposition et combinaison d'un grand nombre d'éléments et d'opérations simples.

A l'issue de cette expérience, possédai-je, tout au plus, quelques lumières sur mes propres goûts musicaux, mais l'intérêt m'en paraissait évident (sauf erreur ou omission !...) pour l'analyse du conditionnement du compositeur, de son processus mental et d'une certaine libération de l'imagination.

La plus grande difficulté rencontrée était celle d'un dédoublement volontaire et conscient de la personnalité. D'une part, celle du compositeur, ayant une idée claire et une audition déjà nette de l'œuvre qu'il désirait obtenir. D'autre part, celle de l'expérimentateur qui devait conserver une lucidité, dont l'exercice devenait dans ces conditions, rapidement douloureux, vis-à-vis de ses propres gestes et de ses propres décisions. Il ne faut pas négliger le fait que de telles expériences doivent être examinées avec la plus grande prudence, car chacun sait qu'il n'existe pas d'observation d'un phénomène qui ne perturbe le dit phénomène, et il est à craindre que la perturbation résultante soit particulièrement forte lorsqu'il s'agit d'un domaine à ce point mal défini, d'une activité aussi délicate. De plus, on peut redouter que, dans ce cas particulier, l'observation arrive à provoquer sa propre perturbation. Si j'ai accepté de courir ce risque, je n'en sous-estime pas l'étendue. Tout au plus, mon ambition se borne-t-elle à essayer de projeter sur un inconnu merveilleux, celui de la création esthétique, le timide rayon d'une lanterne sourde (*).

M.P.
1960

(*) La lanterne sourde avait la réputation d'être particulièrement employée par les cambrioleurs. J'ai pu constater, à plusieurs reprises, combien ma soif d'investigation me faisait passer aux yeux de la majorité pour un dangereux cambrioleur de l'inspiration.

CHAPITRE II

MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

Maintenant, nous pouvons rapidement généraliser l'étude de la composition musicale à l'aide de la stochastique.

Le premier énoncé est que la stochastique est précieuse non seulement en musique instrumentale, mais aussi dans les musiques électromagnétiques. Nous l'avons montré avec plusieurs œuvres à l'appui :

Diamorphoses, 1957-58 (B.A.M. Paris).

Concret PH, (dans Pavillon Philips de l'Exposition de Bruxelles, 1958).

Orient-Occident, musique pour le film homonyme de E. Fulchignoni, produit par l'UNESCO, 1960.

Le deuxième énoncé est qu'elle peut conduire à la création de matériaux sonores nouveaux et à des formes nouvelles.

Pour cela, il faut au préalable faire une hypothèse qui concerne la nature du son, de tout son : [*19*].

Ce chapitre paru presqu'en totalité dans les *Gravesaner Blätter*, Ars Viva Verlag Mainz Nos 18 à 22, est publié avec le consentement de M. le Professeur Hermann Scherchen.

MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

Partie théorique

HYPOTHÈSE DE BASE (Lemme) ET DÉFINITIONS [19].

TOUT son est une intégration de grains, de particules élémentaires sonores, de quanta sonores. Chacun de ces grains élémentaires a une triple nature : la durée, la fréquence et l'intensité *. Tout son, toute variation sonore même continue est conçue comme un assemblage de grains élémentaires suffisamment nombreux et disposés dans le temps d'une façon adéquate. Donc : tout complexe sonore est analysable en séries de sons purs sinusoïdaux même si les variations de ces sons sinusoïdaux sont infiniment rapprochées, brèves et complexes. Dans l'attaque d'un son complexe, dans son corps, dans sa chute, des milliers de sons purs apparaissent dans un intervalle de temps Δt assez court. Des hécatombes de sons purs sont nécessaires à la création d'un son complexe. Il faudrait imaginer un son complexe comme un feu d'artifice de toutes couleurs dans lequel chaque point lumineux apparaîtrait et disparaîtrait instantanément sur le ciel noir. Mais dans ce feu il y aurait tellement de points lumineux et ils y seraient ainsi organisés que leur succession rapide et fourmillante créerait des formes, des volutes à déroulement lent ou au contraire des explosions brèves incendiaires de tout le ciel. Une ligne lumineuse serait constituée par une multitude suffisante de points apparaissant et disparaissant instantanément.

(*) La description de la structure élémentaire des signaux sonores, qui est faite ici, sert de point de départ pour la réalisation musicale et n'est, par conséquent, qu'une image plutôt qu'un fait scientifiquement fondé. Elle peut cependant être considérée comme une première approche vers les considérations introduites dans la théorie de l'information par GABOR (voir Meyer-Eppler, p. 21, Grundlagen und Anwendungen der Informations theorie, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959). Dans la matrice dite de GABOR un événement sonore est résolu en signaux acoustiques élémentaires de très courtes durées effectives, dont l'amplitude peut également être divisée en quanta dans le sens de la théorie de l'information. Toutefois ces signaux élémentaires constituent des fonctions sinusoïdales ayant comme enveloppe une courbe de Gauss ou « en cloche ». Mais on peut à peu près se représenter ces signaux de GABOR par des sons sinusoïdaux de courte durée avec une enveloppe approximativement rectangulaire.

En considérant la durée Δt du grain comme assez petite mais invariable nous pouvons la négliger dans ce qui va suivre et ne considérer que la fréquence et l'intensité.

Les deux natures physiques du son sont la fréquence et l'intensité associées. Elles constituent deux ensembles indépendants de par leur nature, le F et le G. Ils ont un ensemble produit, le F $\times$ G qui est le grain élémentaire de son. En général l'ensemble F est une application univoque (homomorphe) dans l'ensemble G. Une application F dans G peut être donnée, soit par une représentation extensive, soit par une représentation matricielle, soit par une représentation canonique.

Exemples de représentations.

Extensive (terme par terme) :

$$\begin{array}{l|llll}
\textbf{Fréquences} & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \; \ldots\ldots \\
\textbf{Intensités} & \downarrow g_3 & g_n & g_3 & g_h \; \ldots\ldots
\end{array}$$

Matricielle (sous forme de tableau) :

↓	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	.....
g_1	+	0	+	0	0	0	+	
g_2	0	+	0	0	0	+	0	
g_3	0	0	0	+	+	0	0	
.								
.								
.								

Canonique (sous forme de fonction) :

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{f} & = K.g \\
f & = \text{fréquence} \\
g & = \text{intensité} \\
K & = \text{coefficient}
\end{array}$$

L'application peut aussi être indéterminée (Stochastique) et la représentation la plus commode est la matricielle qui donne les probabilités de transitions.

Exemple :

$\downarrow$	f_1	f_2	f_3	f_4	....
g_1	0,5	0	0,2	0	....
g_2	0	0,3	0,3	1	....
g_3	0,5	0,7	0,5	0	....

Ce tableau doit être interprété comme suit : pour chacune des valeurs f_i de f il y a une ou plusieurs valeurs correspondantes g_i des intensités définies par une probabilité. Exemple : à la fréquence f_2 correspondent les deux intensités g_2 et g_3 avec les chances d'occurrence 30 % et 70 % respectivement.

D'autre part, chacun des deux ensembles F et G peut être muni d'une structure. C'est-à-dire de relations et de lois de composition internes.

Le temps t est considéré comme un ensemble totalement ordonné appliqué sur F ou sur G, sous forme lexicographique.

Exemples :

a) $f_1 \quad f_2 \quad f_3 \ldots$
$t = 1, 2, \ldots$

b) $f_{0,5} \quad f_3 \quad f_{\sqrt{11}} \quad f_x \ldots$
$t = 0,5;\ 3;\ \sqrt{11};\ x;\ \ldots$

c)

t =	f_1	f_1	f_2	f_1	f_2	f_2	f_n	f_3	...	...	...
	A	B	C	D	E	...	...	...	...	...	...
	Δt	Δt	Δt	Δt	Δt	Δt	Δt	...	...	...	...

$$\Delta t = \Delta t$$

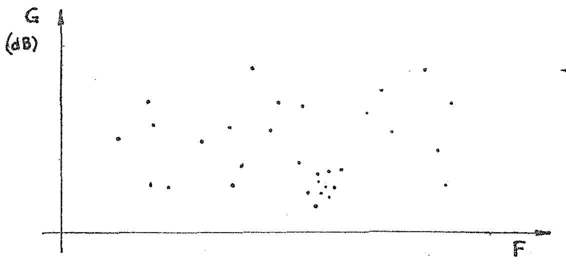
L'exemple c est le plus général car l'évolution continue est sectionnée en tranches d'épaisseur unique Δt, ce qui la transforme en discontinue, bien plus facile à isoler et à examiner au verre grossissant.

Représentations graphiques

Nous pouvons assimiler les valeurs des fréquences pures à des points répartis sur un demi-axe d'abscisses et les valeurs d'intensité sur un demi-axe d'ordonnées.

Les échelles des coordonnées seront logarithmiques.

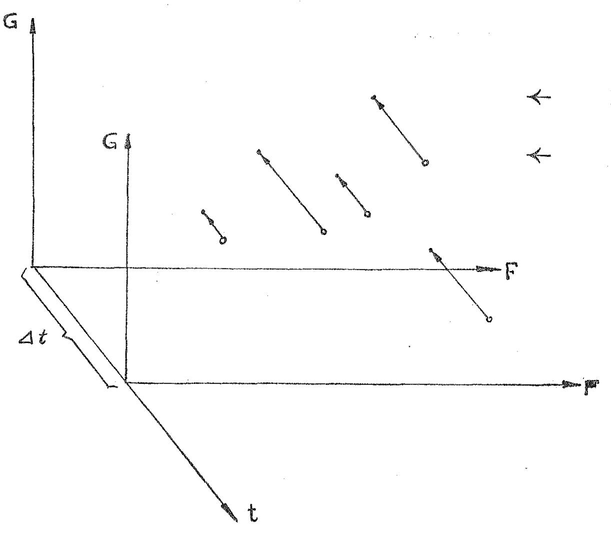
En décibels pour les intensités, en octaves ou en demi-tons pour les fréquences.



← Grain élémentaire conçu comme une association instantanée d'une intensité g et d'une fréquence f.

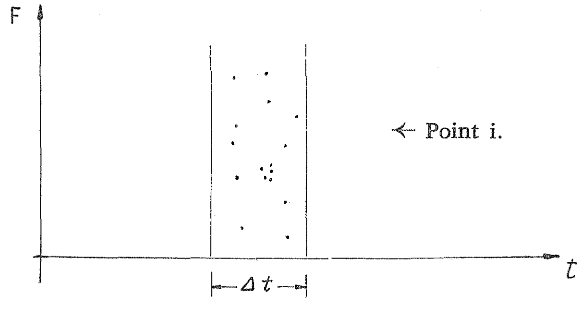
Fréquences en unités logarithmiques (p.e. demi-tons).

Ce nuage de points est la projection cylindrique sur le plan (FG), des grains contenus dans une tranche Δt assez courte.



← Projection sur le plan FG.

← Grain de son.



Chaque point i doit être affecté d'une intensité g_i.

Ces deux représentations graphiques rendent plus tangibles les possibilités abstraites évoquées jusqu'ici.

PSYCHOPHYSIOLOGIE

Nous sommes devant un nuage de points qui évolue. Ce nuage est le produit des deux ensembles F et G dans la tranche Δt. Quelles peuvent être les limites restrictives de la psychophysiologie humaine ?

Quelles sont les manipulations les plus générales, que l'on pourrait infliger aux nuages et à leurs transformations, dans les limites psychophysiologiques ?

L'hypothèse abstraite de base qui est la construction granulaire de tous les sons possibles donne un sens très profond aux deux questions précédentes. En effet dans les limites humaines et par des manipulations de toutes natures de ces nuages de grains, nous pouvons espérer produire non seulement les sons des instruments classiques, des corps élastiques et en général comme ceux utilisés avec prédilection par la musique concrète, mais aussi des ébranlements sonores avec des évolutions inouïes et inimaginables jusqu'ici. Des structures de timbres et des transformations assises sur des bases n'ayant aucun caractère commun avec ce que l'on connaît à ce jour.

Nous pouvons même émettre une supposition d'ordre plus général. Supposons que chacun des points de ces nuages représente non seulement une fréquence pure et son intensité satellite mais déjà une structure de grains élémentaires, ordonnée a priori. Nous pensons qu'une sonorité de deuxième ordre peut être créée de la sorte et même de troisième ordre, etc.

Des travaux récents sur l'audition ont donné des réponses satisfaisantes à certains problèmes de la perception.

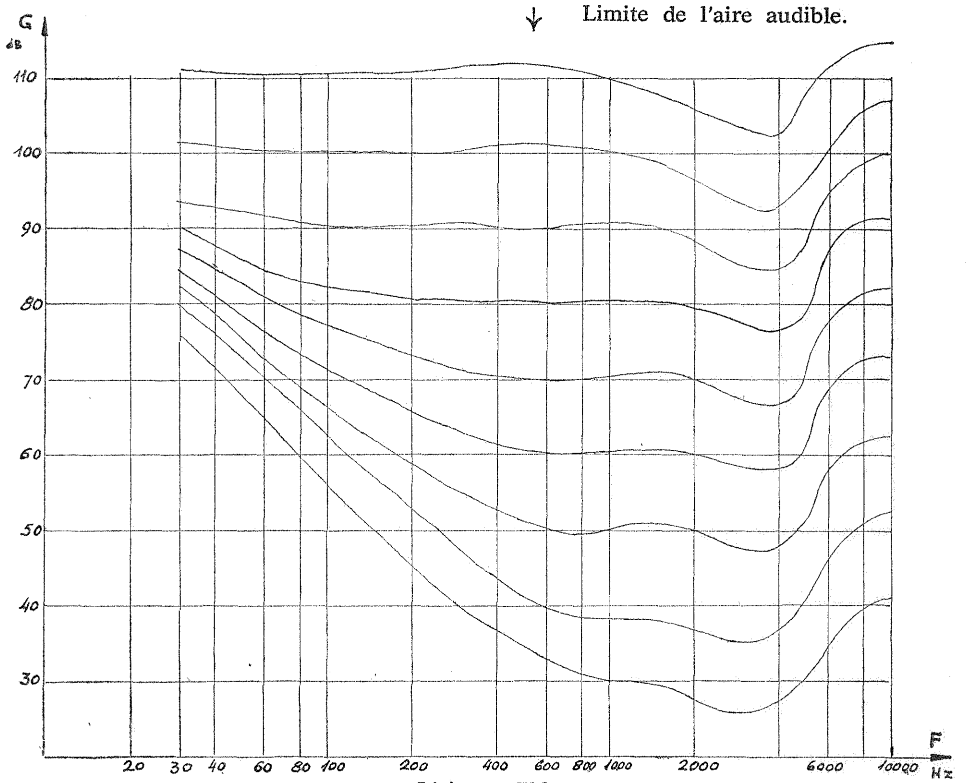
Une série de problèmes de base qui nous concerne et que nous supposerons d'ailleurs résolue même si quelques-unes des solutions font défaut est la suivante [2, 3] :

1° Quelle est la durée minimum perceptible (en tout confort) d'un son sinusoïdal en fonction de sa fréquence et de son intensité ?

2° Quelles sont les valeurs minima des intensités en décibels suivants les fréquences et suivant les durées minima des sons sinusoïdaux ?

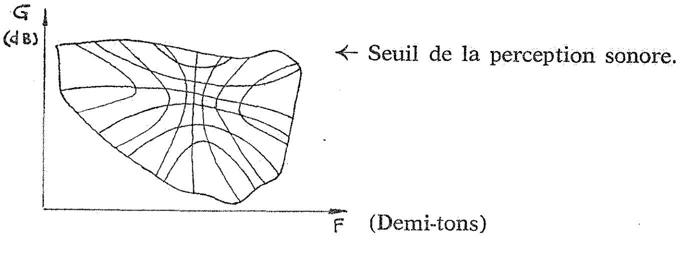
3° Quels sont les seuils d'intervalles mélodiques minima en fonction du registre, des intensités et des durées ?

Une bonne approximation est le diagramme de Fletcher-Munsion, « Diagramme des courbes d'égale intensité sonore perçue ».

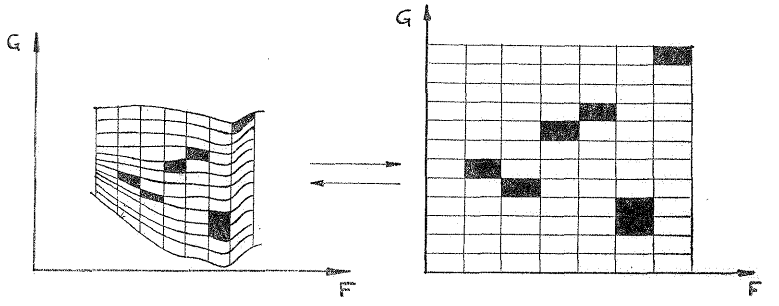


L'aire audible.

Et en résumé il existe le dénombrement des grains élémentaires audibles. Leur nombre total est de 340 000. L'oreille est plus sensible au centre de l'aire audible. Dans les extrémités elle perçoit moins les intervalles d'amplitude et les intervalles mélodiques. De sorte que si l'on voulait représenter par les deux coordonnées F et G l'aire audible mais de manière homogène, c'est-à-dire que chaque élément de surface $\Delta F . \Delta G$ contienne la même densité de grains de sons perceptibles, nous obtiendrions une sorte de mappemonde.



Pour simplifier les raisonnements qui vont suivre sans les altérer, nous allons nous baser sur le diagramme de Fletcher et supposer qu'une transformation adéquate et biunivoque est appliquée à ce groupe de coordonnées qui transformera cet espace courbe en rectiligne ordinaire.



Tous les résultats expérimentaux précédents sont établis dans des conditions idéales et sans rapport avec la complexité réelle des sons naturels de l'orchestre et des corps élastiques en général, sans parler des sons plus complexes de l'industrie ou de la nature chaotique [4]. Théoriquement [5], un son complexe ne peut être représenté de façon exhaustive que par un diagramme tridimensionnel F, G, t donnant la fréquence instantanée et l'intensité instantanée en fonction du temps. Mais pratiquement cela revient à dire que pour l'établissement de la représentation d'un bruit instantané, par exemple d'un simple bruit d'échappement d'une voiture, il faudrait des mois de calculs et de graphiques. Ce problème qui est une impasse rappelle singulièrement l'aventure de la mécanique classique qui prétendait rendre compte de tous les phénomènes physiques et même biologiques à l'aide seulement de quelques formules et au bout d'un temps suffisamment long. Mais alors, pour décrire l'état à un instant t d'une masse gazeuse de volume très réduit, même en admettant des simplifications à l'origine des calculs, il aurait fallu plusieurs siècles de travail humain !

C'était un faux problème car inutile et en ce qui concerne la masse gazeuse, la théorie cinétique des gaz de Maxwell-Boltzmann avec sa méthode statistique a été d'une grande fécondité [6]. Cette méthode rétablissait la valeur des échelles d'observation. Pour un phénomène macroscopique c'est l'effet global massique qui compte, et chaque fois que l'on veut observer un phénomène, il faut d'abord établir le rapport des échelles observateur $\leftrightarrow$ phénomène. Ainsi si l'on observe les amas galactiques, il faut décider si c'est le mouvement d'ensemble qui nous intéresse, si c'est le mouvement d'une seule étoile ou si c'est la constitution moléculaire d'une toute petite région sur une étoile.

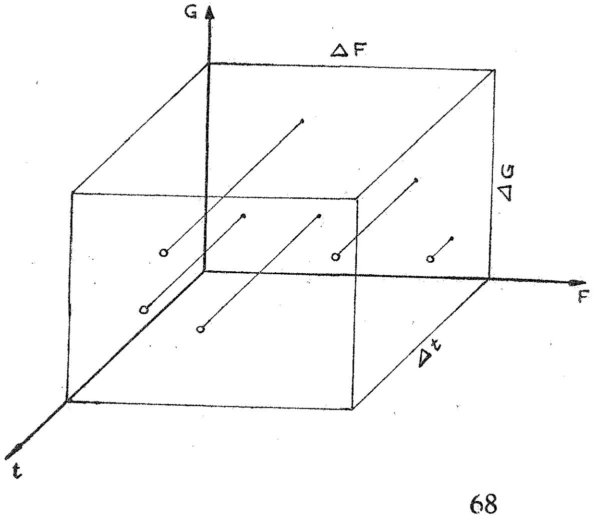
De même en est-il des sons complexes et même des sons suffisamment simples. Ce serait peine perdue que d'essayer de rendre compte analytiquement ou graphiquement des caractères des sons complexes en vue de les utiliser dans une composition électromagnétique. Pour la manipulation de ces sons des méthodes macroscopiques sont nécessaires.

Inversement et c'est ce qui nous intéresse en particulier, agir comme architectes sur la matière sonore pour construire des sons complexes et des évolutions de ces êtres, signifie qu'il faut utiliser des méthodes d'analyse et de construction macroscopiques. Les microsons, les grains élémentaires n'ont pas d'importance à l'échelle où nous nous plaçons. Seuls les groupes de grains et les caractéristiques de ces groupes ont un sens. Naturellement dans des cas tout particuliers, le grain unique sera rétabli dans sa gloire. Dans une chambre de Wilson c'est la particule élémentaire qui porte la physique théorique et expérimentale sur ses épaules et dans le soleil c'est l'ensemble des particules et leurs interréactions denses qui font l'objet soleil.

Notre champ d'évolution est donc l'espace courbe invoqué précédemment mais simplifié en espace rectiligne à l'aide d'une transformation biunivoque adéquate qui sauvegarde la validité des raisonnements que nous allons poursuivre.

TRAMES

La représentation graphique d'un nuage de grains dans une tranche de temps Δt examinée au début nous a apporté une notion nouvelle, celle de la densité des grains par unité de volume, $\Delta F . \Delta G . \Delta t$.



Plan de référence (FG) à l'instant t.

ΔD sera la dimension de la densité.

Tout son possible peut donc être découpé en une quantité précise d'éléments $\Delta F.\Delta G.\Delta t.\Delta D$ à quatre dimensions disposés dans cet espace suivant certaines règles définissant ce son, résumées par une fonction à quatre variables : s (F, G, D, t).

L'échelle de la densité sera elle aussi logarithmique avec comme base un nombre qui peut être pris entre 2 et 3 (*).

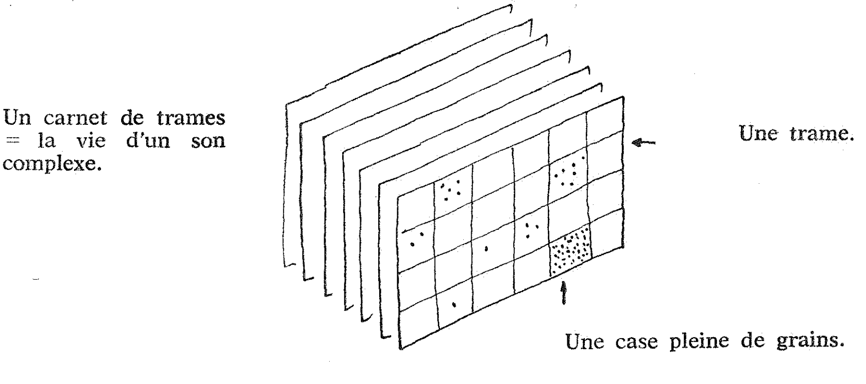
Pour simplifier l'exposé nous ferons abstraction de cette nouvelle coordonnée de densité. Elle sera toujours présente dans notre esprit mais comme un être associé à l'élément tridimensionnel $\Delta F.\Delta G.\Delta t$.

Si le temps est considéré comme un procédé d'ordonnance lexicographique, nous pouvons sans perte supposer les Δt égaux constants et suffisamment petits. Nous pouvons ainsi raisonner sur un espace à deux dimensions défini par les deux demi-axes F et G à condition de ne pas perdre de vue que le nuage des grains de sons existe dans l'épaisseur de temps Δt et qu'ils ne sont qu'artificiellement « plaqués » sur le plan (F G).

Définition de la trame

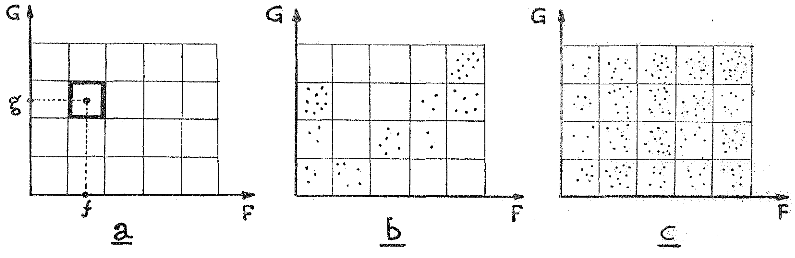
La trame est l'aire audible (F, G) réglée par un quadrillage suffisamment dense et homogène tel qu'il a été défini en p. (7) et dont les cases sont, ou ne sont pas, occupées par des grains.

De cette manière un son quelconque et son histoire peuvent être décrits à l'aide d'un nombre suffisant de feuilles de papier comportant une trame donnée T. Ces feuilles seront placées dans un certain ordre lexicographique.



(*) Le choix de l'échelle logarithmique et de la base comprise entre 2 et 3 est fait pour fixer les idées. Toutefois, il correspond à des résultats des recherches de musique expérimentale réalisées par l'auteur; exemple : Diamorphoses, disque BAM Paris.

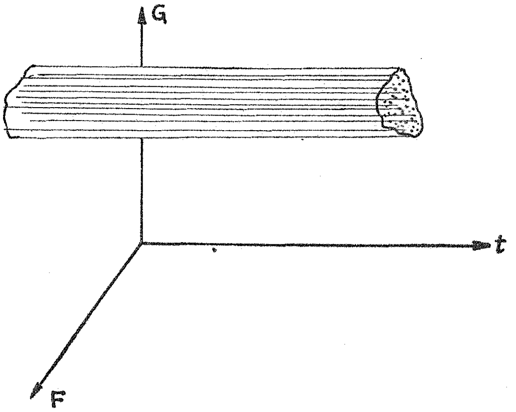
Les nuages de grains dessinés sur les trames différeront d'une trame à l'autre par leur position géographique (ou topologique) et par leur densité superficielle.



La trame a contient un petit rectangle élémentaire avec un petit nuage de densité d de fréquence moyenne f et d'amplitude moyenne g. C'est presque un son pur.

La trame b représente un son plus complexe avec graves et aigus dominants et médium faible. La trame c représente un bruit blanc de faible densité qui peut donc être perçu comme un chatoiement sonore occupant toute l'aire audible.

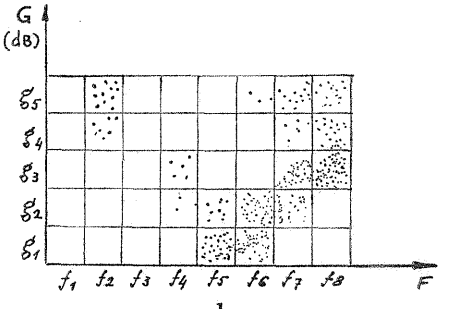
Ce qui est capital dans toutes les constatations faites jusqu'ici, c'est que nul cas n'a été fait de la fixité géographique des grains sur les trames. En effet tous les sons naturels ou instrumentaux sont constitués par de petits éléments de surface remplis de grains qui fluctuent autour d'une fréquence et d'une intensité moyennes. De même pour la densité. Cette constatation est capitale et il est fort probable que l'échec des musiques électroniques dans la constitution de timbres nouveaux, mise à part l'insuffisance de la méthode sérielle, est dû en grande partie à la fixité des grains qui engendrent des structures en forme de paquets de spaghetti.



La fixité géographique des grains est un cas tout particulier, le cas le plus général étant la mobilité, la répartition statistique de grains autour de positions d'équilibre.

Par conséquent, en grande majorité, les sons actuels peuvent être décomposés en rectangles $\Delta F.\Delta G$ suffisamment petits dont les positions géographiques et les densités varient d'une trame à l'autre suivant des lois bien ou peu définies. Par convention les grains des rectangles $\Delta F.\Delta G$ y sont répartis au hasard, suivant une loi que nous allons définir.

Ainsi le son de l'exemple d à cet instant précis est constitué par la réunion des rectangles :



(Demi-tons).

d

(f_2g_4), (f_2g_5), (f_4g_2), (f_4g_3), (f_5g_1), (f_5g_2), (f_6g_1), (f_6g_2), (f_6g_5), (f_7g_2), (f_7g_3), (f_7g_4), (f_7g_5), (f_8g_3), (f_8g_4), (f_8g_5) et dans chacun des rectangles les grains sont disposés d'une manière dissymétrique et homogène.

Construction des éléments $\Delta F.\Delta G$ *des trames*

1° *Par le calcul.*

Nous allons examiner les moyens de calcul des éléments $\Delta F.\Delta G.\Delta t.\Delta D$.

Comment répartir les grains dans un volume élémentaire ? Si nous nous fixons la densité moyenne de grains (= nombre de grains par unités de volume) nous avons à résoudre un problème de probabilité dans l'espace à quatre dimensions. Une méthode plus simple serait de raisonner puis de calculer suivant les quatre coordonnées indépendamment.

Pour la coordonnée t la loi de répartition des grains sur l'axe des temps est :

(r) $P_x = e^{-cx}.dx$ ou encore, $P_{x_i} = e^{-cx_i}.c.\Delta x_i$ (voir appendice 1)

Pour les coordonnées G, F, D, la loi stochastique sera :

$$(r') \qquad f(j)dj = \frac{2}{a}\left(1 - \frac{j}{a}\right) dj, \qquad \text{ou encore :}$$

$$P_i = \frac{2}{2.10^n}\left(1 - \frac{i}{2.10^n - 1}\right) \quad \text{(voir appendice 1)}$$

A partir de ces formules, nous pouvons former des tables de fréquences des valeurs t,G,F,D (voir problème analogue chap. I). Ces formules sont à notre sens, privilégiées, car elles découlent de raisonnements très simples, probablement les plus simples, et il est nécessaire de partir d'un nombre minimum d'énoncés et de contraintes si on veut s'en tenir au principe de la table rase (1re et 3e règles du Discours de la Méthode).

Soit un des volumes élémentaires $\Delta t.\Delta D.\Delta F.\Delta G$ de la trame à l'instant t. A ce volume on attribue une densité D tirée de ΔD suivant la table issue de la formule (r').

On définit des points sur Δt avec une densité linéaire $D = c$ suivant la table définie par la formule (r).

A chaque point on attribue un grain sonore de fréquence f et d'intensité g tirées de l'intérieur du rectangle $\Delta F.\Delta G$ à l'aide des tables issues de la formule (r').

Les correspondances se font soit graphiquement, soit à l'aide de tirages au sort successifs d'urnes composées suivant les tables précédentes.

2° *Mécaniquement.*

a) Au magnétophone: les grains sont réalisés à partir de sons sinusoïdaux dont la durée est constante, de 0,04 sec. environ. Ces grains doivent couvrir l'aire élémentaire $\Delta F.\Delta G$ choisie. Le déroulement dans le temps est réalisé à l'aide du tableau des durées, pour une densité $c = D$ minimum. Par mixage de tronçons de cette bande sur elle-même, nous pouvons obtenir des densités variant géométriquement avec comme raison 1,2,3... suivant le nombre de pistes (magnétophones) dont nous disposons.

b) Aux ordinateurs : les grains sont réalisés à partir de formes d'ondes dûment programmées suivant Gabor pour un ordinateur auquel on aura couplé un convertisseur analogique. Un deuxième programme fournirait la construction des volumes élémentaires $\Delta t.\Delta D.\Delta F.\Delta G$, à partir des formules (r) et (r').

Première remarque générale

Supposons une case $\Delta F.\Delta G.\Delta t.$ qui quoique occupée d'une manière homogène par des grains de son, varie dans le temps en fluctuant autour d'une densité moyenne d_m. Nous pouvons appliquer un autre raisonnement plus synthétique et admettre que ces fluctuations dans le cas le plus général (si la portion de son est suffisamment longue) seront quelconques, donc obéiront aux lois du hasard. Dans ce cas, le problème est posé de la façon suivante :

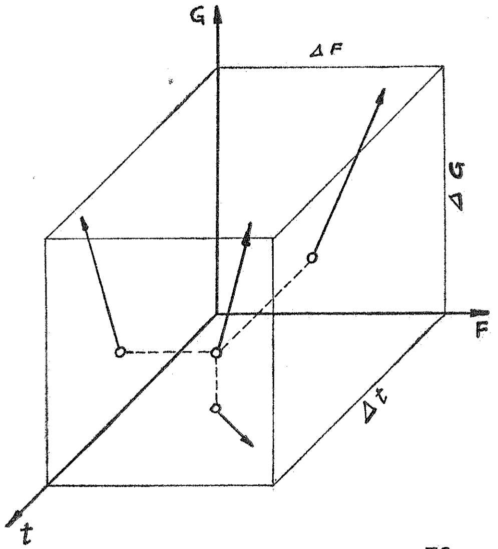
Etant donné un nuage prismatique de grains, de densité d_m de section $\Delta F.\Delta G$ et de longueur $\sum_{0}\Delta t$, quelle est la probabilité pour que d grains se trouvent dans un volume élémentaire $\Delta F.\Delta G.\Delta t.$? Si le nombre d_m est suffisamment faible, la probabilité est donnée par la formule de Poisson :

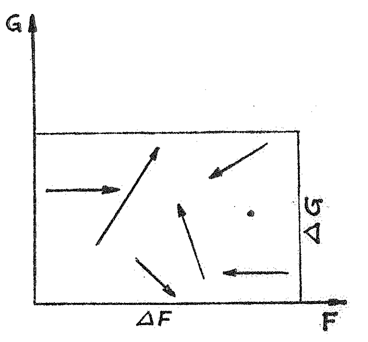
$$P_d = \frac{d_m^d}{d\,!}\, e^{-d_m}$$

Pour la définition de chaque grain, nous réutiliserons les méthodes exposées précédemment.

Deuxième remarque générale (Espace Vectoriel) [8]

Nous pourrions aussi construire les cases élémentaires ($\Delta F.\Delta G.$) des trames non plus avec des points mais avec des vecteurs élémentaires associés aux grains (Espace Vectoriel). En effet, la durée





moyenne de 0,04 sec par grain suppose un petit vecteur. Le cas particulier du grain se produit lorsque le vecteur est parallèle à l'axe du temps, alors sa projection sur le plan (F,G) est un point, et la fréquence du grain est constante. En général, les fréquences et les intensités des grains peuvent être variables et le grain, un glissando très court.

Dans un espace vectoriel (F,G) ainsi défini, la construction des trames serait peut-être alourdie, car il faudrait introduire la notion de vitesse et de répartition statistique de ses valeurs, mais l'intérêt de l'entreprise est énorme. Nous pourrions imaginer des trames à base de champs granulaires aimantés ou complètement neutres (désordonnés).

Dans le cas du désordre total, nous calculerons la probabilité f (v) d'existence d'un vecteur v dans le plan (F,G), à l'aide de la formule de Maxwell [11] rapportée à deux dimensions :

$$f(v) = \frac{2v}{a^2} e^{-\frac{v^2}{a^2}} \quad \text{et pour la valeur moyenne} \quad v_1 \leq v_m \leq v_2$$

$$P(v_m) = \frac{2\sqrt{\pi}}{a} \{ \theta(\lambda_1) - \theta(\lambda_2) \}$$

dans laquelle $\lambda_i = \frac{v_i}{a}$ et $\theta(\lambda_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\lambda_i}^{+\lambda_i} e^{-\lambda^2} d\lambda$ pour $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$

(loi normale de Gauss). [12]

De toute manière, qu'il s'agisse d'un espace vectoriel ou d'un espace scalaire, les raisonnements ne sont pas modifiés dans l'ensemble. [13]

Résumé des trames

a. Une trame est définie par un ensemble de nuages eux-mêmes ensemble de rectangles élémentaires $\Delta F . \Delta G$, contenant ou non des grains de son.

Ceci à l'instant t dans une tranche de temps Δt aussi petite que l'on veut.

b. Les grains de sons forment une densité propre à chaque rectangle élémentaire $\Delta F . \Delta G$ et y sont généralement répartis ergodiquement (*).

(*) Ergodique (principe) : « l'effet capricieux d'une opération dépendant du hasard, se trouve régularisé de plus en plus par une répétition suffisante de cette opération ». Ici, il est sous-entendu que l'on considère une succession assez grande de trames. [14].

c. La conception du volume élémentaire $\Delta F . \Delta G . \Delta t . \Delta D$ est telle qu'aucune *simultanéité* des grains n'est prévue en général. La simultanéité se présente lorsque la densité est suffisamment élevée. Sa fréquence est liée à la grandeur de la densité. Tout est question d'échelle et ce paragraphe se rapporte surtout à la réalisation. La dimension temporelle du grain (vecteur) étant de l'ordre de 0,04 sec. aucun chevauchement de deux grains (vecteurs) ne saurait être admis lors de la réalisation de la densité élémentaire par exemple : $D_0 = 1{,}5$ grains/sec. Et comme la distribution superficielle des grains est homogène seul le hasard peut créer ce chevauchement.

d. A la limite une trame peut ne contenir qu'un seul son pur (sinusoïdal), et même aucun son du tout (trame vide).

OPERATIONS ELEMENTAIRES SUR LES TRAMES

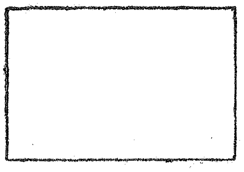
(*Algèbre*)

Soit un son complexe. A un instant t de sa vie et durant une épaisseur Δt il pourra être représenté par un ou plusieurs nuages de grains ou de (vecteurs) sur le plan (FG). C'est la définition que nous avons donnée de la trame. La réunion de plusieurs de ces trames dans un ordre donné, décrit ou prescrit la vie de ce complexe sonore. Il serait intéressant d'envisager dans toute sa généralité la manière de combiner, de juxtaposer des trames pour décrire et surtout pour fabriquer des évolutions sonores, continues ou discontinues en vue d'en jouer dans une composition.

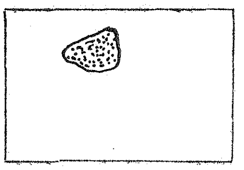
A cet effet nous allons emprunter des terminologies et des symboles de l'algèbre moderne, mais d'une manière élémentaire et à titre d'introduction à un développement ultérieur que nous ne saurions entreprendre pour l'instant.

Remarque : Il est égal de se placer au niveau du phénomène physique ou au niveau de la perception. Au niveau de la perception nous comptons arithmétiquement ce qui, au niveau physique, est géométrique. Ceci peut s'exprimer d'une façon plus rigoureuse. La perception constitue un groupe additif, « presque » isomorphe de l'excitation physique qui est un groupe multiplicatif. Le « presque » est nécessaire pour conjurer les approximations.

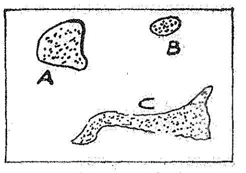
Des grains (ou des vecteurs) du plan (F,G) constituent un nuage. Une trame peut être composée de nul ou de plusieurs nuages de grains (vecteurs).



Trame I.



Trame II.



Trame III.

Pour noter qu'un grain (vecteur) *a* appartient à un nuage E on écrit $a \in$ E et la relation contraire s'écrit $a \notin$ E.

Si tous les grains d'un nuage X sont grains d'un autre nuage Y, on dit que X est *inclus* dans Y ou encore que X est *partie* ou *sous-nuage* de Y. Cette relation est notée :

$$X \subset Y \text{ (inclusion).}$$

En conséquence nous aurons les propriétés suivantes :

$$X \subset X \text{ quel que soit } X.$$

$$X \subset Y \text{ et } Y \subset Z \text{ entraînent } X \subset Z.$$

Lorsque $X \subset Y$ et $Y \subset X$, les nuages X et Y sont constitués des mêmes grains, ils sont indiscernables et on écrit :

$$X = Y \text{ (égalité).}$$

Un nuage peut ne contenir qu'un seul grain.

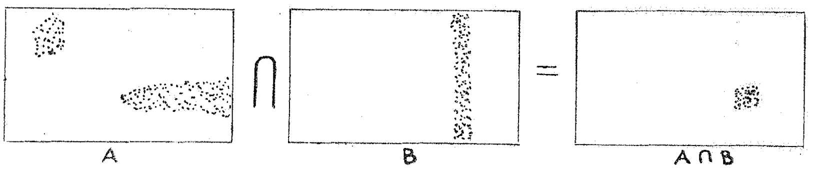
Un nuage X est dit *vide*, lorsqu'il ne contient aucun grain tel que $a \in$ X. Le nuage vide se note $\varnothing$.

OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

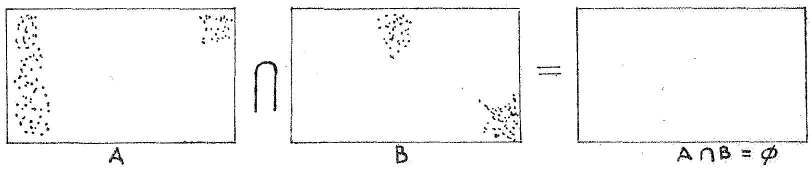
Ces opérations s'appliquent aussi bien aux nuages qu'aux trames

Nous pouvons donc utiliser indifféremment les notions « trame » ou « nuage », avec nuage ou grain « comme éléments constitutifs ».

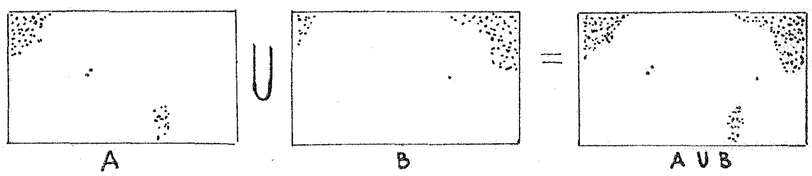
L'intersection de deux trames A et B est la trame des nuages qui appartiennent à A *et* à B. On la note $A \cap B$ et cette notation se lit A inter B.



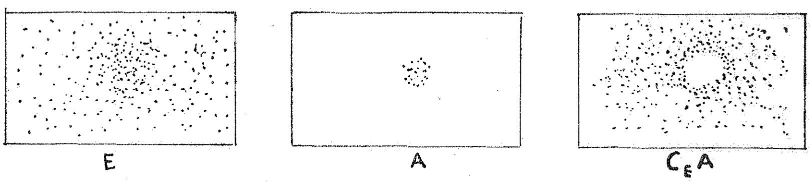
Lorsque A $\cap$ B = $\varnothing$, on dit que A et B sont *disjoints*.



La *réunion* de deux trames A et B est l'ensemble des nuages qui appartiennent *soit* à A *soit* à B.

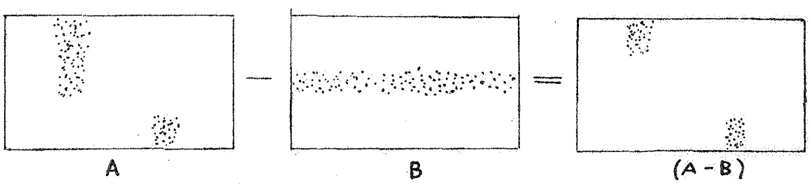


La complémentaire d'une trame A par rapport à une trame E contenant A est l'ensemble des nuages de E qui n'appartiennent pas à A. On la note CA lorsqu'il n'y a pas de doute possible sur E.



La différence (A — B) de A et de B est l'ensemble des nuages de A qui n'appartiennent pas à B. Conséquence immédiate :

$$A - B = A - (A \cap B) = C_A (A \cap B).$$



Nous allons arrêter ici cet emprunt. Il permettra d'avoir une vue d'ensemble plus nette, plus confortable des manipulations et raisonnements qui vont suivre.

CARACTERES DISTINCTIFS DES TRAMES

Dans notre volonté de créer des complexes sonores à partir de la matière première du son, le son sinus (ou de ses remplaçants du type de Gabor), complexes sonores aussi riches que les sons naturels, plus inouïs que les sons naturels, avec des évolutions maîtrisées scientifiquement et sur des plans très généraux abstraits, nous avons implicitement reconnu l'importance de trois facteurs de base qui semblent pouvoir dominer *et* la construction théorique d'un processus sonore *et* son efficacité sensorielle :

1° La densité des événements élémentaires;
2° La situation géographique des événements sur les trames;
3° L'ordre ou le désordre des événements.

A première vue donc la densité des grains (vecteurs) leur topologie et leur quantité d'ordre sont les êtres indirects, les aspects, que nos oreilles macroscopiques percevront. Ce qui est admirable dans la nature des choses c'est que l'oreille et l'esprit suivent les réalités objectives et réagissent en direct malgré les grosses imperfections inhérentes ou culturelles. La mesure a été le fondement des sciences expérimentales. L'homme se traite volontiers d'invalide des sens et c'est pour cela et avec raison d'ailleurs qu'il s'est armé de machines indicatrices de mesures faites par d'autres machines. Pourtant il arrive avec ses oreilles, avec ses yeux, à mesurer des êtres ou des phénomènes physiques, mais transformés comme si un filtre déformant s'interposait entre la perception immédiate et sa conscience. Depuis environ un siècle la loi logarithmique des sensations a été découverte. Il semble que cette loi n'ait pas été contredite jusqu'ici. Mais comme la connaissance ne s'arrête jamais, la science de demain trouvera certainement non seulement un assouplissement, une finesse plus grande à cette loi mais encore un début d'explication au pourquoi de ce filtre déformant, si étonnant.

Cette transformation statistique quasi biunivoque de l'excitation en perception nous a permis jusqu'ici de raisonner sur des êtres physiques, les trames, tout en pensant « faits perçus ».

Une réciprocité de même nature, entre la perception et son intelligence nous permet de passer des trames, aux caractères donc de distinction.

Ainsi les raisonnements que nous allons poursuivre s'appliquent aussi bien à des notions pures qu'à des résultantes de la perception qui en sont les causes ou les conséquences sensibles suivant que nous prenons l'attitude de l'artisan ou celle de l'auditeur.

Nous avons déjà remarqué la Densité et la Topologie des grains et des cases et nous avons admis les notions d'Ordre et de Désordre dans la répartition homogène superficielle des grains.

Nous allons examiner de très près la notion d'ordre car c'est elle qui se cache probablement derrière les deux autres. C'est-à-dire que la densité et la topologie sont plutôt des incarnations palpables simplifiées de cette notion fuyante et multiforme du désordre.

Lorsque nous disons ordre ou désordre nous sous-entendons d'abord « d'objets », « d'éléments » puis, et c'est déjà plus complexe, nous définissons les « éléments » mêmes dont nous voulons étudier et construire l'ordre ou le désordre, leur échelle par rapport à la nôtre puis, nous qualifions et nous nous efforçons de mesurer cet ordre ou désordre.

Nous pouvons même dresser une liste de tous les ordres et désordres de ces êtres à toutes les échelles, de tous les aspects, de toutes les mesures et même les caractères d'ordre ou de désordre de cette liste et à nouveau établir les aspects et les mesures.

D'après l'exemple précité des gaz si nous nous plaçons à l'échelle moléculaire (nous aurions pu descendre au niveau atomique etc...), les valeurs absolues des vitesses, leurs directions et répartitions dans l'espace, sont de toutes sortes. Et nous pouvons distinguer les « éléments » porteurs d'ordre ou de désordre. Ainsi si en théorie nous pouvions isoler l'élément « directions » et supposer qu'il est astreint à suivre certaines directions privilégiées et non pas toutes, nous imposerions un certain degré d'ordre et ceci indépendamment des autres éléments qui constituent la notion gaz. De même dans un temps suffisamment long les valeurs des vitesses d'une seule molécule se distribuent autour d'une valeur moyenne avec des écarts plus ou moins grands qui suivent la loi de Gauss. Là nous avons un certain ordre puisque ces valeurs sont terriblement plus nombreuses, au voisinage de cette valeur moyenne, que toutes les autres extrêmes, jusqu'aux infiniment grandes ou infiniment petites.

Prenons un autre exemple plus sensible et aussi vrai. Une foule humaine de 500 000 personnes rassemblée sur la place d'une ville. Si nous examinons le déplacement d'ensemble de cette foule nous constatons qu'elle ne bouge pas. Pourtant chaque individu remue ses membres, sa tête, ses yeux etc., et déplace son centre de gravité de quelques centimètres dans toutes les directions. Si les valeurs des déplacements de son centre de gravité étaient très grandes la foule se désagrégerait dans une épouvante de hurlements en raison des chocs multiples des individus entre eux. Les valeurs donc statistiques de ces déplacements sont normalement situées entre des limites très faibles qui varient avec la densité de la foule.

Du point de vue de ces valeurs à l'immobilité, le désordre est faible. Une autre caractéristique de cette foule serait l'orientation des visages. Si un orateur parle depuis un balcon avec un effet calmant, probablement 499 000 visages regarderont le balcon et 998 000 oreilles écouteront les paroles d'or. Un millier donc de visages et 2 000 oreilles seront distraites pour des raisons variables, fatigue, gêne, imagination, sexualisme, mépris, vol, etc. Nous pourrons affirmer avec toute la grande presse et sans contestation possible que la foule et l'orateur étaient absolument d'accord, mieux, que 500 001 personnes étaient unanimes. Le degré d'ordre que recherchait l'orateur atteignait un maximum tout au moins pendant quelques minutes et si l'unanimité s'est exprimée également à l'issue du meeting, l'orateur pourra être persuadé que les idées étaient aussi bien ordonnées dans sa tête que dans celles de la foule.

Nous constatons après ces deux exemples extrêmes que la notion d'ordre et de désordre est à la base d'un très grand nombre de phénomènes et même que la définition d'un phénomène ou d'un objet est très souvent tributaire de cette notion.

D'autre part, que cette notion est établie à partir de groupes précis et distincts d'éléments. Que l'échelle est importante dans le choix des éléments. Enfin, que la notion d'ordre ou de désordre implique le rapport des valeurs effectives sur toutes les valeurs possibles que peuvent prendre les éléments d'un groupe, ce qui introduit la notion de probabilité dans l'estimation quantitative de l'ordre ou du désordre.

Nous appellerons *variété* d'un groupe d'éléments le nombre d'éléments distincts.

Nous appellerons *entropie* d'un groupe d'éléments la quantité d'ordre ou de désordre définissable dans ce groupe. L'entropie est liée à la notion de variété et par-là même à la probabilité d'un élément du groupe. Ces notions sont celles de la théorie des communications qui elle-même fait un emprunt au deuxième principe de la thermodynamique. (Théorème H de Boltzmann) [15].

La variété s'exprime en nombre pur ou en son logarithme à base 2. Ainsi le sexe humain à deux éléments, femelle et mâle, sa variété est soit 2, soit 1 bit :

$$(1 \text{ bit} = \log_2 2).$$

Supposons un groupe de probabilités (groupe de nombres réels positifs p_i dont la somme est 1). L'entropie de ce groupe sera par définition :

$$H = - K \Sigma \, p_i . \log p_i .$$

Si la base des logarithmes est 2 l'entropie s'exprime en bits.

Ainsi si nous avons une séquence de pile ou face les probabilités pour pile et pour face étant 1/2 l'entropie de cette séquence c'est-à-dire l'incertitude à chaque coup est de 1 bit. Si les deux faces étaient pile l'incertitude serait levée et l'entropie H serait zéro.

Conservons le pile et face et supposons que l'avènement de pile ou de face ne se fasse pas en lançant la pièce mais d'après une loi déterminée, univoque, (par exemple choisir à chaque coup pair : face, et à chaque impair : pile). L'incertitude, le désordre, est toujours absent et l'entropie H est zéro. Si la loi devient excessivement complexe l'apparition de pile ou de face semblera à un observateur humain régie par la loi du hasard, du désordre et l'incertitude sera rétablie. Ce que cet observateur pourra faire c'est, par exemple, compter les coups pile et face, chiffrer leurs fréquences respectives, en déduire les probabilités, puis calculer l'entropie en bits. Si la fréquence de pile est égale à celle de face l'incertitude sera maximum et égale à 1 bit.

Cet exemple typique montre en gros le passage de l'ordre au désordre et la façon de graduer ce désordre pour pouvoir le comparer avec d'autres. Il montre aussi l'importance de l'échelle. L'intelligence humaine d'un observateur assimilerait une complexité déterministe jusqu'à une certaine limite. Au-delà, la complexité à ses yeux, basculerait dans l'imprévisible, dans le hasard, le désordre et le visible (macroscopique) glisserait dans l'invisible (microscopique). D'autres méthodes, d'autres points de vue seront nécessaires pour observer et contrôler les phénomènes.

Au début de ce chapitre nous avions admis que l'esprit et surtout l'oreille étaient très sensibles à l'ordre ou au désordre des phénomènes. Les lois perceptives et de jugement sont probablement en rapports géométriques (logarithmiques) avec les lois excitatrices. Nous n'en savons pas grand-chose, et à nouveau nous nous bornerons à examiner des êtres généraux et à tracer une orientation d'ensemble des processus poétiques d'une musique très générale, sans pouvoir donner des chiffres, des modules, des déterminismes. Nous sommes encore assez optimistes pour penser que, l'expérience, l'action, solidaires des hypothèses abstraites, peuvent trancher dans le vif, biologiquement, le conflit entre l'ignorance et la réalité.

ETUDE DE L'ATAXIE (ordre ou désordre) AU NIVEAU D'UN NUAGE DE GRAINS (vecteurs)

Axe des temps : Le degré de l'ataxie, l'entropie, est fonction de la simultanéité des grains et du nombre d'intervalles distincts de temps entre l'émission de chaque grain. En effet si la *variété* des durées entre les émissions est faible, l'entropie est, elle aussi, faible. Si par exemple dans un Δt donné chaque grain est émis à des intervalles de temps réguliers la variété temporelle sera 1 et l'entropie nulle. Le nuage aura une ataxie de degré nul, il sera absolument ordonné. Par contre, si dans une suite assez longue de Δt les grains sont émis suivant la loi $P_x = \delta e^{-\delta x} dx$ le degré d'ataxie sera beaucoup plus grand. Enfin la limite de l'entropie est l'infini car nous pouvons imaginer toutes les valeurs possibles d'intervalles de temps avec une égale probabilité. Ainsi si la variété est $n \rightarrow \infty$, la probabilité pour chaque intervalle de temps est $p_i = \frac{1}{n}$ et l'entropie :

$$H = - K \sum_{i=0}^{n} \cdot \log p_i$$

$$H = - K \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = - K n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = - K \log \frac{1}{n} = K \log n$$

et pour $n \rightarrow \infty$, $H \rightarrow \infty$.

Ceci est moins vrai en pratique car un Δt ne présentera jamais une trop grande variété de durées et son entropie sera relativement faible, de plus une composition sonore aura un nombre Δt qui dépassera difficilement le nombre 100 000, donc :

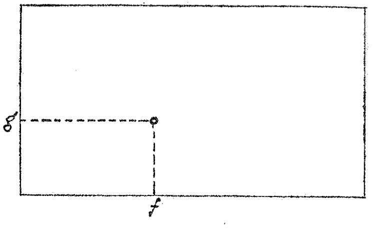
$$H \leqslant \log 100\,000 \text{ et } H \leqslant 16{,}6 \text{ bits.}$$

Axe de fréquences (mélodique). Les mêmes raisonnements y sont valables avec une plus grande restriction de la variété des intervalles mélodiques ou même des fréquences absolues en raison des frontières restreintes de l'aire audible.

L'entropie est nulle lorsque la variété des fréquences des grains est 1 c'est-à-dire lorsque le nuage ne contient qu'un seul son pur.

Axes des intensités et des densités. Les observations précédentes sont valables.

A la limite donc si les entropies suivant les trois axes d'un élément $\Delta F . \Delta G . \Delta t . \Delta D$ sont nulles cet élément ne contiendra qu'un seul son pur d'intensité constante, émis à des intervalles réguliers.



Un seul grain émis à intervalles de temps réguliers.

En conclusion un nuage peut ne contenir qu'un seul son pur émis à des intervalles de temps réguliers, et son entropie moyenne (moyenne arithmétique des trois entropies) est nulle. Il peut contenir des grains chaotiquement répartis, ataxie très grande, maximum, avec une entropie moyenne maximum (théoriquement ∞).

Entre ces deux bornes les grains peuvent être répartis d'une infinité de manières avec des entropies moyennes comprises entre 0 et max. et pouvant reproduire par exemple la Marseillaise ou bien une série dodécaphonique, etc.

PARENTHESES

Observations générales sur l'ataxie

En prenant appui sur cette dernière éventualité, nous allons examiner les processus très généraux des formes dans tous les domaines de la pensée, dans toutes les réalités physiques et psychiques.

A cet effet nous imaginons une « Chose Première ». Cette « Chose Première » sera plastique à volonté, déformable instantanément, progressivement ou par à-coups, extensible ou rétractable, unique ou plurale, aussi simple qu'un électron (!) ou aussi complexe que l'Univers (par rapport à l'homme, s'entend).

Elle aura une Entropie Générale Moyenne donnée. A une époque définie nous lui faisons subir une transformation. Du point de vue ataxique cette transformation peut avoir trois effets :

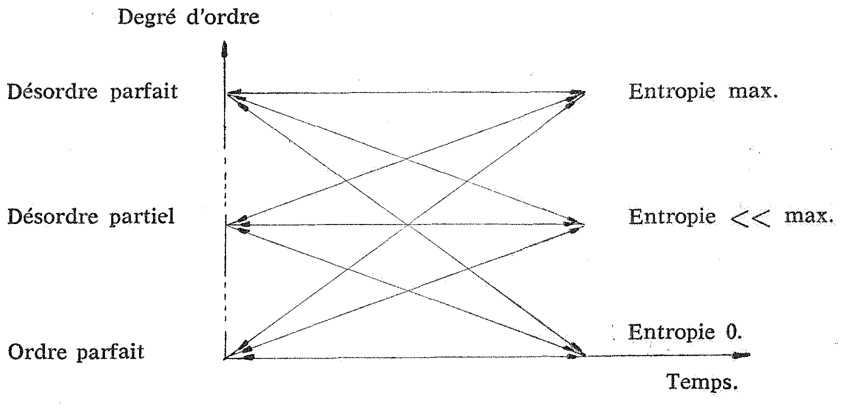
1° Le degré de complexité (la variété) n'a pas changé, la transformation est neutre et l'Entropie Globale n'a pas varié;
2° Le degré de complexité a augmenté, l'Entropie aussi;
3° La transformation était simplificatrice, l'Entropie a diminué.

Ainsi la transformation neutre peut agir et transformer :
I — Le désordre parfait en désordre parfait (fluctuations).
II — Le désordre partiel en désordre partiel.
III — L'ordre parfait en ordre parfait.

La transformation multiplicatrice transforme :
I — Le désordre partiel en désordre parfait.
II — Le désordre partiel en désordre plus grand.
III — L'ordre parfait en désordre partiel.

Et la transformation simplificatrice transforme :
I — Le désordre parfait en désordre partiel.
II — L'ordre partiel en ordre plus grand.
III — L'ordre partiel en ordre parfait.

Et sous forme de diagramme cinématique nous aurons :



ETUDE DE L'ATAXIE AU NIVEAU DES TRAMES (ensemble de nuages)

D'après ce qui précède, une trame qui est constituée par un ensemble de cases $\Delta F.\Delta G$ associées à des densités pendant une tranche de temps Δt, peut être dissociée suivant les deux caractères des grains, la fréquence et l'amplitude et affectée d'une entropie moyenne. Ainsi nous pouvons classer les trames suivant le critère de l'ataxie à l'aide de deux paramètres de désordre : la variété des fréquences, et la variété des intensités. Nous ferons abstraction de la répartition temporelle des grains dans Δt ainsi que de la densité qui d'ailleurs est implicitement liée aux variétés des deux grandeurs fondamentales du grain.

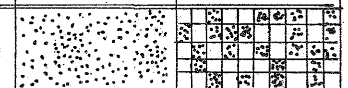
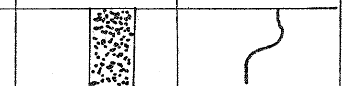
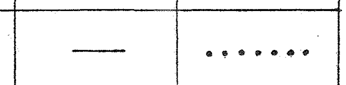
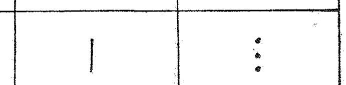
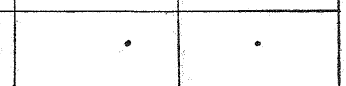
Nous symbolisons :

Le désordre parfait par	∞;
Le désordre partiel par	n ou m;
L'ordre partiel par	n ou m;
L'ordre parfait par	0.

Du point de vue ataxique une trame est formulée par un couple de valeurs de l'entropie attribué dans le même ordre au couple des fréquences et des intensités de ses grains. Ainsi le couple ($n\,\infty$) signifie : trame dont les fréquences ont une entropie assez faible (désordre ou ordre partiel) et dont les intensités ont une entropie maximum (dèsordre matériellement parfait).

Nous pouvons construire un tableau entropique des trames :

Tableau entropique des trames

Désordre parfait		Désordre partiel		Ordre parfait		Symbole	Observations	Schèmas	Schèmas
F	G	F	G	F	G				
F	G					∞ . ∞	trame unique		
F			G			∞ . n	infinité de trames		
F					G	∞ . 0	trame unique		
	G	F				n . ∞	infinité de trames		
	G			F		0 . ∞	trame unique sons purs		
		F	G			n . m	infinité de trames		
		F			G	n . 0	infinité de trames		
			G	F		0 . n	infinité de trames		
				F	G	0 . 0	trame unique (son pur)		

CONSTRUCTION DES TRAMES

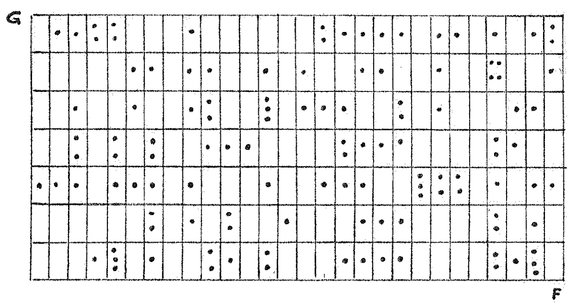
Nous allons passer rapidement en revue quelques-unes des trames du tableau précédent.

Trame $(\infty.\infty)$. Soit un très grand nombre de grains répartis au hasard sur toute l'étendue de l'aire audible et durant un intervalle de temps égal à Δt. Soit aussi une grille assez fine de manière que la densité moyenne de grains par case ne dépasse pas le nombre 30. La loi de répartition est alors donnée par la formule de Poisson :

$$P_k = \frac{(d_m)^k}{K!} e^{-d_m}$$

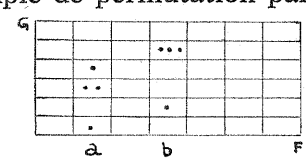
où d_m est la densité moyenne et P_k la probabilité pour qu'il y ait k grains dans une case considérée. Si d_m augmente au-dessus de 30 environ alors la loi de répartition devient *normale*.

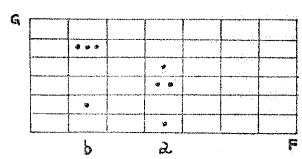
Voici un exemple de répartition poissonienne pour $d_m = 0{,}6$ grains par case en moyenne, dans une grille de 196 cases, d'une trame $(\infty.\infty)$:



Ainsi pouvons-nous construire des trames $(\infty.\infty)$, soit à la main par des répartitions suivant les lignes et les colonnes, soit par des programmations adéquates sur ordinateurs. Pour une densité moyenne très élevée, ces trames dont le désordre est parfait (maximum) en s'engençant donneront un son très riche, voisin du son blanc, jamais identique dans le temps. Si on calcule à la main et pour éviter l'élaboration et les calculs numériques de chaque trame $(\infty.\infty)$ nous pouvons à partir déjà de la première trame $(\infty.\infty)$ en construire un grand nombre. A cet effet nous permuterons les cases par colonnes ou par lignes.

Exemple de permutation par colonnes :



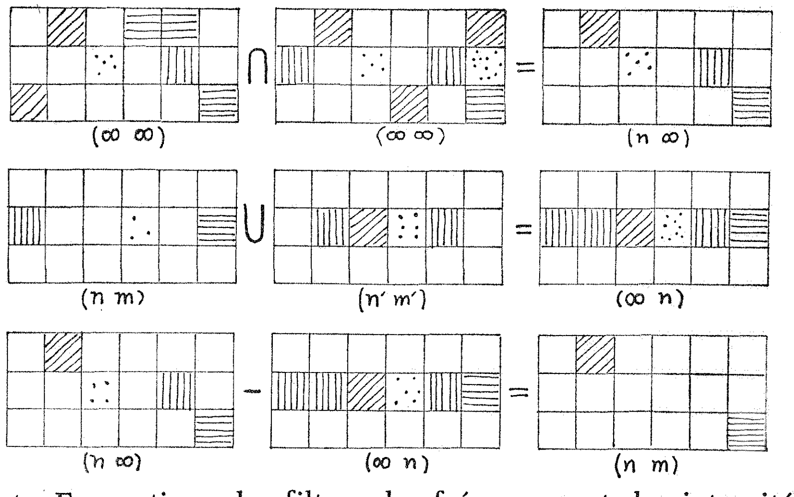


Discussion. Il est évident que pour une densité moyenne élevée, plus le nombre de cases est grand, plus la répartition des grains dans une région de la trame tend à se régulariser (ergodisme) et les fluctuations d'une case (nuage) à l'autre sont faibles. Mais les limites absolues de la densité des cases de l'aire audible seront fonction des moyens techniques disponibles, règles à calculs, tables, machines à calculer, ordinateurs, papiers réglés, instruments d'orchestre, magnétophone, ciseaux, impulsions programmées de sons purs, découpages automatiques, enregistrements programmés, cerveaux électroniques, convertisseurs analogiques, etc.

Si chaque case est considérée comme un symbole défini par le nombre k de grains, l'entropie de cette trame (pour une finesse de grille donnée) sera naturellement affectée par la densité moyenne des grains par case et croîtra en même temps. C'est là que toute une série d'expériences statistiques sur des sujets devra circonscrire les limites perceptibles de l'ataxie de ces trames ($\infty.\infty$) et même exprimer les nuances colorées du son blanc. Il est fort possible que l'oreille classe dans le même tiroir de très nombreuses trames dont l'entropie varie fortement. Il en résulterait un appauvrissement, une simplification de la correspondance, information physique $\rightarrow$ perception mais on aurait au moins l'avantage de diminuer considérablement le travail de fabrication des trames.

Toutes trames. A partir de quelques trames et en appliquant les *opérations élémentaires* nous pouvons construire toutes les trames du tableau entropique.

Quelques exemples :



Nota. En pratique, les filtres des fréquences et des intensités imitent parfaitement ces opérations élémentaires.

ENCHAINEMENTS DES TRAMES

Nous avons admis jusqu'ici qu'un son quelconque, qu'une musique quelconque, peut être décrite à l'aide d'un nombre suffisant de trames disposées dans l'ordre lexicographique des pages d'un livre. Si nous représentons chaque trame par un symbole spécifique (codage biunivoque), le son ou la musique pourraient être traduits par une succession de symboles nommée protocole :

a b g k a b. . . . bg. . . .

chaque lettre identifiant des trames et des instants t pour des Δt isochrones.

Sans rechercher les causes de telle ou telle succession de trames c'est-à-dire sans entrer ni dans la structure physique des sons ni dans la structure logique de la composition, nous pouvons dégager certains modes de succession, certaines espèces de protocoles. Nous renvoyons aux ouvrages spécialisés sur la question [16]. Ici nous allons passer rapidement en revue les définitions élémentaires.

Une chose quelconque, ou son symbole unique, est appelé *terme*. Deux termes successifs matérialisent une *transition*. Le deuxième terme s'appelle le *transformé* et le changement effectué est représenté par :

terme A $\rightarrow$ terme B.

ou bien

A $\rightarrow$ B

Une *transformation* est un groupe de transitions. Exemple tiré du protocole précédent :

$$\downarrow \begin{array}{llll} a & b & g & k \ldots\ldots \\ b & g & k & a \ldots\ldots \end{array}$$

Autre exemple :

$$\downarrow \begin{array}{lll} \text{do} & \text{ré} & \text{la} \ldots\ldots \\ \text{si} & \text{sol} & \text{mi} \ldots\ldots \end{array}$$

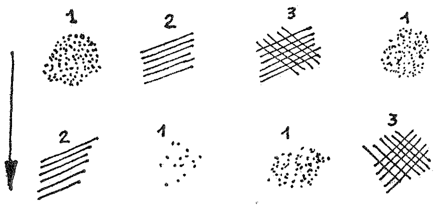
Autre exemple :

Une transformation est *close* lorsque le groupe des transformés ne contient que des éléments appartenant au groupe des termes.

Exemples :

l'alphabet : $\downarrow \begin{array}{llll} a & b & c \ldots\ldots & z \\ b & c & d \ldots\ldots & a \end{array}$

$$\downarrow \begin{array}{lllllllllll} \text{do} & \text{ré}b & \text{ré} & \text{mi}b & \text{mi} & \text{fa} & \text{sol}b & \text{sol} & \text{la} & \text{si}b & \text{si} \\ \text{ré} & \text{sol}b & \text{sol} & \text{do} & \text{fa} & \text{si} & \text{la} & \text{ré}b & \text{mi}b & \text{mi} & \text{si}b \end{array}$$



1° Nuage de sons ponctuels. ex. pizzicatti.

2° Réseau de glissandi parallèles à une direction.

3° Réseau de glissandi parallèles à deux directions.

avec une infinité de termes :

$$\downarrow \begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots\ldots\ldots \\ 6 & 7 & 4 & 100 & 1 & 2 & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

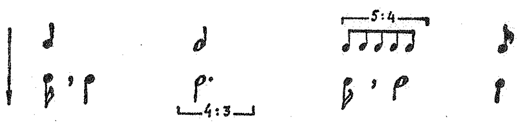
Une transformation est *univoque* lorsque chaque terme a un seul transformé.

Exemple :

$$\downarrow \begin{array}{ccccc} b & a & b & e & \ldots\ldots\ldots \\ a & b & c & d & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Exemples de transformations non univoques :

$$\downarrow \begin{array}{cccc} a & b & c & \ldots\ldots\ldots \\ b,c & d & m,n,p, & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$



Changement du timbre d'un groupe de valeurs :

Timbres ↓	clarinettes	hautbois	cordes	timbales	cuivres
	timbales cordes	timbales basson	cuivres	hautbois	cordes hautbois

Caractériologie de musique concrète [4,5] :

« Allure » ↓	nulle	vibrée	tremblée	cyclique	irrégulière
	cyclique ou tremblée	irrégulière	nulle ou irrégulière	tremblée	nulle ou vibrée ou cyclique

Une transformation est *biunivoque* lorsque chaque terme a un seul transformé et lorsque chaque transformé est issu d'un seul terme.

Exemple :

$$\downarrow \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & \ldots\ldots\ldots \\ b & a & d & c & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Représentation matricielle. Une transformation :

$$\downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ a & c & c \end{matrix}$$

peut être représentée par un tableau comme suit :

↓	a	b	c
a	+	0	0
b	0	0	0
c	0	+	+

ou encore

↓	a	b	c
a	1	0	0
b	0	0	0
c	0	1	1

Ce tableau est une matrice des transitions du groupe des termes au groupe des transformés.

Produit : Soit deux transformations T et U :

$$T : \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & d & a & b \end{matrix} \qquad \text{et} \qquad U : \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ d & c & d & b \end{matrix}$$

Dans certains cas nous pouvons appliquer à un terme n de T une transformation T puis une transformation U. Ceci s'écrit : U [T(n)], et est le produit des deux transformations T et U à condition que les transformés de T soient des termes de U. Ainsi, d'abord T : a → b puis U : b → c et en résumé V = U.T : a → c.

Pour calculer le produit appliqué à tous les termes de T nous utiliserons la représentation matricielle :

T:

↓	a	b	c	d
a	0	0	1	0
b	1	0	0	1
c	0	0	0	0
d	0	1	0	0

U:

↓	a	b	c	d
a	0	0	0	0
b	0	0	0	1
c	0	1	0	0
d	1	0	1	0

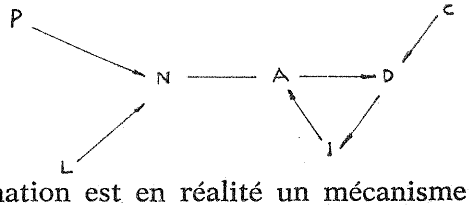
et la transformation totale V est égale au produit des deux matrices T et U dans l'ordre U, T.

$$\overset{U}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \times \overset{T}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = \overset{V}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}$$

Le diagramme cinématique est une expression graphique de la transformation. Pour le former on relie chaque terme à son transformé avec une flèche vers le transformé. Le *point représentatif* d'un diagramme cinématique est un point imaginaire qui se déplace par bonds de terme à terme en suivant les flèches du diagramme :

Exemple :

$$T: \downarrow \begin{matrix} A & C & D & I & L & N & P & A \\ D & D & I & A & N & A & N & N \end{matrix}$$



Une transformation est en réalité un mécanisme et théoriquement tous les mécanismes de l'univers physiques ou biologiques peuvent être représentés par des transformations sous cinq conditions de correspondance :

1° Chaque état du mécanisme (la continuité est décomposée en états discrets aussi rapprochés qu'on le désire) correspond biunivoquement à un terme de la transformation;

2° Chaque suite d'états traversés par le mécanisme en raison de sa structure interne, correspond à une suite ininterrompue des termes de la transformation;

3° Si le mécanisme atteint un état et y demeure (état d'équilibre) le terme qui correspond à cet état n'a pas de transformé;

4° Si les états d'un mécanisme se reproduisent de la même manière sans fin, la transformation a un diagramme cinématique en circuit fermé;

5° Un arrêt du mécanisme et sa remise en route à partir d'un état quelconque, représentent dans le diagramme un déplacement du point représentatif dû non pas à une flèche mais à une action arbitraire sur le papier.

Le mécanisme est déterminé lorsque la transformation correspondante est univoque et close.

Le mécanisme est non déterminé lorsque la transformation correspondante n'est pas univoque. Dans ce cas la transformation est dite *stochastique*. Dans un mécanisme stochastique il faut remplacer dans la matrice de la transformation les nombres 0 et 1 par des fréquences relatives. Ce sont les probabilités d'alternative de telle ou telle transformation. Et le mécanisme déterminé n'est qu'un cas particulier du mécanisme stochastique, dans lequel les probabilités de transition sont 0 et 1.

Exemple : Toutes les règles harmoniques ou polyphoniques de la musique classique pourraient se représenter par des mécanismes et la fugue est un des mécanismes les plus achevés et les plus déterminés. On peut même généraliser et dire que le compositeur d'avant-garde ne se contente pas de suivre les mécanismes de son époque mais d'en proposer de nouveaux, *et* dans le détail *et* dans la forme générale.

Si dans un temps suffisamment long, ces probabilités sont constantes et si elles sont indépendantes des états à l'origine, la suite stochastique s'appelle plus particulièrement *chaîne de Markov.*

Soit deux trames A et B et un protocole de 50 transitions.

ABABBBABAABABABABBBBABAABABBAABABBABAAABABBAABBABBA

Les fréquences réelles des transitions sont :

$A \rightarrow B = 17$ fois
$A \rightarrow A = 6$ fois
23 fois

$B \rightarrow A = 17$ fois
$B \rightarrow B = 10$ fois
27 fois

Matrice des fréquences de transitions réelles :

↓	A	B
A	6	17
B	17	10

Matrice des probabilités (fréquences relatives) de transitions (MPT) :

↓	A	B
A	0,26	0,63
B	0,74	0,37
	1,00	1,00

Si la matrice précédente était ainsi :

↓	A	B
A	0,5	0,5
B	0,5	0,5

l'imprévisibilité de la succession de A et de B serait maximum et l'entropie aussi. Inversement, la contrainte serait nulle.

Si la matrice précédente était ainsi :

↓	A	B
A	0	1
B	1	0

La transformation serait absolument déterminée et l'entropie de la suite, nulle. La contrainte serait maxima.

Il se peut que les symboles d'un protocole dépendent des précédents d'une certaine manière. Exemple : protocoles digrammes, trigrammes, etc. Dans ce cas, la matrice des probabilités de transitions (MPT) peut être rendue indépendante à l'aide d'un codage approprié.

Nous pouvons avoir des (MPT) avec des paramètres. Exemple :

a)

↓	A	B
A	0,26	0,63
B	0,74	0,37

b)

↓	A	B
A	0,5	0,5
B	0,5	0,5

c)

↓	A	B
A	1	0
B	0	1

Les a, b, c, sont des paramètres.

Nous pouvons coupler deux ou plusieurs (MPT) de symboles différents à condition d'introduire une transformation déterminée ou stochastique entre les divers paramètres.

Ainsi un protocole de timbres peut être couplé à un protocole d'intensité et à un protocole de fréquences, etc. Et chacun des protocoles peut être couplé avec tous les autres par paires.

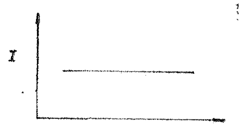
Des mécanismes isolés ou couplés peuvent avoir une ou plusieurs situations de stabilité, d'équilibre, vers lesquelles ils tendent de façon unique ou pas. Et le mécanisme stochastique est un tout fermé au même titre qu'un mécanisme déterminé.

Si une Matrice de Probabilités de Transition (MPT) a un état théorique d'équilibre, alors son protocole tend vers une proportionnalité des états, stable et homogène (ergodique) dans le temps. Cette proportion des symboles est l'état d'équilibre final. Dans la deuxième partie nous verrons, deux méthodes de calcul de cet état de stabilité d'une MPT ainsi que la définition d'une Entropie Moyenne. C'est à l'aide de cette Entropie moyenne que nous serons à même de définir puis de comparer les degrés d'ataxie de tel ou tel mécanisme que nous avons appliqué à une collection de trames.

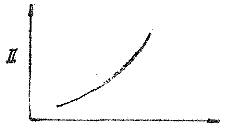
De cette manière tout ce qui a été dit sur l'ataxie des grains, des nuages, peut être généralisé et transposé aux collections (carnets) de trames. Un critère fondamental de l'évolution d'une musique peut être formé par les transformations de l'ataxie dans le temps.

Par exemple : Il est très commun en composition musicale de ne pas livrer toutes les richesses possibles mais de les réserver et de les introduire peu à peu dans le temps. Il se peut aussi qu'on imagine une musique qui donne d'un coup, au départ, toute la variété, puis, qu'elle la monnaie dans le temps.

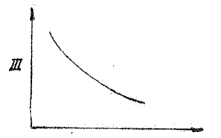
Les évolutions élémentaires de l'ataxie peuvent être schématisées par les diagrammes suivants :



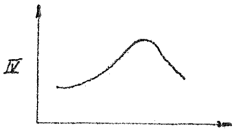
I. L'évolution est nulle.



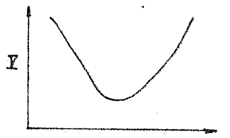
II. Le taux de désordre, la richesse augmentent



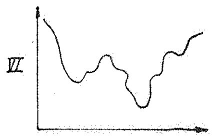
III. L'ataxie diminue.



IV. L'ataxie augmente puis diminue.



V. L'ataxie diminue puis augmente.



VI. L'évolution de l'ataxie est très complexe mais elle peut s'analyser par les trois premiers diagrammes.

Le diagramme VI peut être donné sous forme de protocole. L'ataxie donc peut être mise sous forme matricielle avec paramètres etc. et toutes les règles logiques des transformations qui ont été admises jusqu'ici sont applicables aux MPT de l'entropie.

Comment l'ataxie se perçoit-elle? De beaucoup de manières. Si les grains d'une surface donnée d'une trame sont répartis d'une manière homogène l'augmentation de la densité augmentera la richesse, l'imprévisibilité, l'entropie.

Dans la même répartition ergodique des grains, si certaines symétries dans la disposition des grains se manifestent et sont perceptibles, une contrainte est sentie d'où une diminution de l'entropie.

Dans la même répartition, si des liaisons mélodiques ou harmoniques sont effectuées et perçues l'imprévisibilité est diminuée, l'entropie aussi.

Ainsi après le premier déroulement d'une série de douze sons de la gamme tempérée l'imprévisibilité est tombée à zéro, la contrainte est maxima, le choix est nul et l'entropie aussi. La richesse, donc l'intérêt, se déplace sur d'autres terrains : des harmonies, des timbres, des durées, etc. et beaucoup d'astuces compositionnelles visent à ranimer l'entropie.

En fait, le discours sonore n'est qu'une perpétuelle fluctuation de l'entropie, sous toutes ses formes [17].

Pourtant la sensibilité humaine ne suit pas forcément la variation de l'entropie même si celle-ci est logarithmique à base appropriée. C'est plutôt une succession, un protocole de tensions et de détentes à toutes sortes de degrés, qui animent l'auditeur souvent en sens inverse de l'entropie. Ainsi le Boléro de Ravel dont l'unique variation est la dynamique a une Entropie pratiquement nulle dès la troisième ou quatrième répétition de l'idée fondamentale. Pourtant l'intérêt ou plutôt l'agitation psychique croit avec le temps du fait justement de cette immobilité-banalité. Et toutes les musiques ou manifestations incantatoires visent à un effet de tension maximum avec une entropie minimum. L'inverse est également vrai, et vu sous un certain angle, le bruit blanc avec son maximum d'entropie est lassant très rapidement. Il semble qu'il n'y ait pas de correspondance esthétique → entropie. Ces deux êtres sont liés à chaque occasion d'une manière assez indépendante. Cette constatation laisse encore quelque répit au libre arbitre du compositeur même si ce libre arbitre enfoui sous le fatras des acquis de la culture et de la civilisation n'est plus qu'une ombre, à tout le moins une tendance, un simple stochasme.

Le gros obstacle à une généralisation trop intempestive est surtout d'ordre logique, car un objet n'est objet qu'en fonction de sa définition, et il y a, surtout en art, une quasi-infinité de définitions donc une quasi-infinité d'entropies car la notion d'entropie est un épiphénomène d'une définition. Laquelle ou lesquelles sont valables? L'oreille, les yeux, puis le cerveau démêlent des situations parfois inextricables, avec ce qu'on appelle intuition, goût, intelligence, etc. Et deux définitions avec deux entropies différentes peuvent être perçues comme identiques. Mais il est vrai aussi que l'ensemble des définitions d'un objet a son propre degré de désordre.

Ce qui nous intéresse dans cet exposé n'est pas d'approfondir une situation si difficilement complexe et inexplorée mais simplement de faire un tour d'horizon sur les possibilités qu'offrent des domaines connexes de la pensée contemporaine, en vue d'agir, de chercher.

Pour conclure brièvement car les applications qui suivent sont plus éloquentes que des textes explicatifs, nous admettrons qu'une collection, qu'un carnet de trames peut être exprimé par des matrices de probabilités de transitions paramétrées. Elles sont affectées d'un degré d'ataxie, d'une entropie qui est calculable sous certaines conditions.

Pourtant, nous admettrons, pour rendre l'analyse, puis les synthèses d'une œuvre sonore, à portée de l'intelligence commune et de la règle à calcul, que nous discernons trois critères pour une trame.

1° *Critère topologique.*

La position des cases $\Delta F . \Delta G$ sur l'aire audible est qualitativement importante et une énumération de leurs combinaisons possibles est susceptible de créer un groupe de termes bien définis auxquels nous pourrions appliquer la notion de l'entropie et de son calcul;

2° *Critère de densité.*

La densité superficielle des grains d'une case $\Delta F . \Delta G$ constitue aussi une qualité d'ailleurs immédiatement perceptible, et nous pourrions également définir des termes auxquels la notion et le calcul de l'entropie seraient applicables;

3° *Critère d'ataxie pure* (définie par rapport aux grains d'une trame).

Une case a trois variables : la fréquence moyenne, l'amplitude moyenne, et la densité moyenne des grains. Pour une trame nous pouvons donc établir trois protocoles indépendants ou liés, puis trois matrices de probabilités de transition couplées ou pas. Chacune des matrices aura son entropie et les trois matrices couplées auront une entropie moyenne. Dans le déroulement sonore nous pouvons établir plusieurs séries de trois matrices donc plusieurs séries d'entropies moyennes, leurs variations constituant le critère d'ataxie.

Les deux premiers critères qui sont généraux et à l'échelle soit des trames soit des cases, ne nous occuperont plus par la suite. Par contre, le troisième, plus conventionnel, sera repris en détail dans la deuxième partie de ce chapitre, celle des applications musicales qui ont donné une composition pour orchestre à cordes : « Analogique A », une composition pour sons sinusoïdaux: «Analogique B», réalisées en 1958/59.

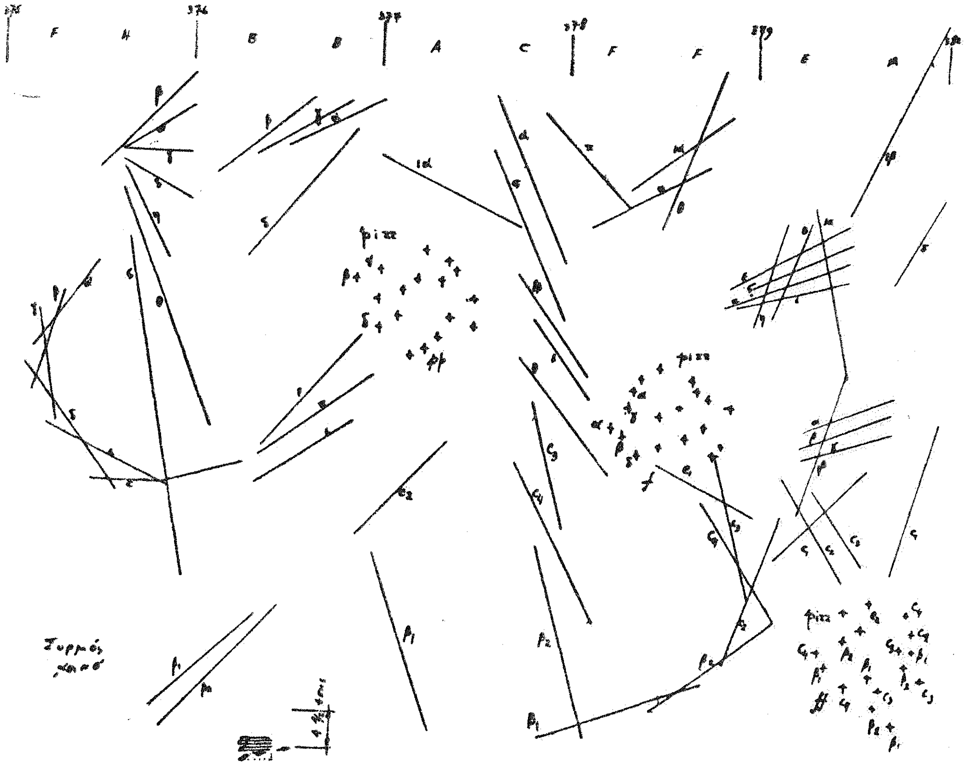
Applications

Dans cette partie des applications nous allons nous borner à titre d'exemple, à un cas simple dans lequel, chacune des composantes G, F, D, de la trame, ne prend que deux valeurs suivant des matrices de probabilités de transition que l'on couplera à l'aide de paramètres. D'ailleurs le choix des probabilités des matrices se fera de manière à n'avoir que le cas régulier conformément à la Théorie des événements en chaîne telle qu'elle est définie dans l'ouvrage de M. Maurice Fréchet [14].

Il est évident que des mécanismes stochastiques plus riches et plus complexes sont hautement intéressants à construire et à mettre en œuvre, mais étant donné le volume considérable des calculs qu'ils nécessitent, il serait vain de les entreprendre à la main et par contre très souhaitable de les programmer et de les traiter à l'ordinateur.

Toutefois, malgré la simplicité structurelle de ce qui suivra, le mécanisme stochastique qui s'en dégagera sera un modèle, un type sous-jacent à tout autre bien plus complexe, et servira de catalyseur à des études ultérieures plus poussées. Car si ici nous nous bornons à l'étude des trames telles qu'elles ont été définies dans cette étude (ensembles de grains élémentaires) il va sans dire que rien n'empêche de généraliser cette méthode de structuration (composition) à des définitions d'êtres sonores de plus de trois dimensions. Ainsi, supposons non plus des trames mais des *critères* de définitions d'un être sonore tels que le timbre, le degré d'ordre, la densité, la variation etc. et même des *critères* de définition de structures élémentaires plus ou moins complexes par exemple, des structures mélodiques et temporelles de groupes de sons (*), des structures instrumentales, spatiales, cinématiques, etc. le même schème stochastique est adaptable à tous ces cas précités; il suffit de bien définir les variations et de pouvoir les classer même grossièrement.

Le résultat sonore ainsi obtenu n'est pas garanti a priori par le calcul. L'intuition et l'expérience devront toujours jouer leur fonction de guide, de décision et de test.



(*) « Syrmos » pour 18 cordes, écrite en 1959, est fondée sur des transformations stochastiques de huit textures de base : *a*) Réseaux parallèles horizontaux ; *b*) Réseaux parallèles (glissandi) ascendants ; *c*) Réseaux parallèles (glissandi) descendants ; *d*) Réseaux parallèles croisés (ascendants et descendants) ; *e*) Nuages de pizzicati ; *f*) Atmosphères de frappés col legno avec des courts glissandi col legno ; *g*) Configurations géométriques de glissandi convergents ou divergents ; *h*) Configurations de glissandi traités en surfaces réglées gauches. La structure mathématique de cette œuvre est la même que celle de « Analogique A » et de « Analogique B » que nous allons étudier immédiatement.

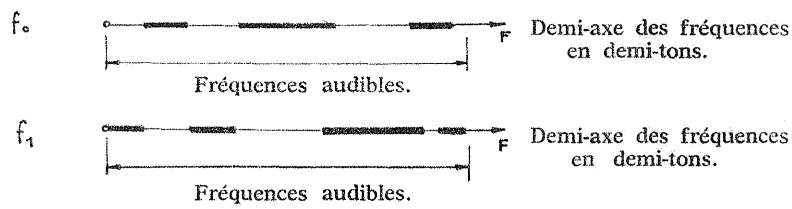
ANALYSE (définition du schéma d'un mécanisme).

Nous allons définir le schéma d'un mécanisme « analogique » de processus stochastique. Il servira à la production d'êtres sonores et à leurs transformations dans le temps.

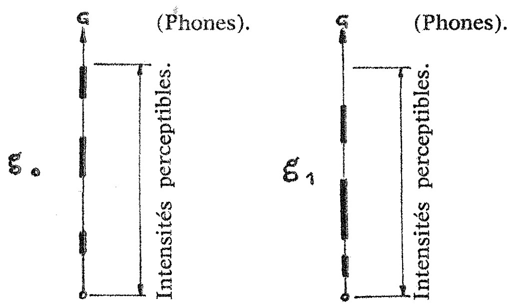
Ces êtres sonores auront des trames qui présenteront les traits suivants, choisis librement :

1° Elles comporteront deux combinaisons distinctes de plages de fréquences les f_0, f_1.

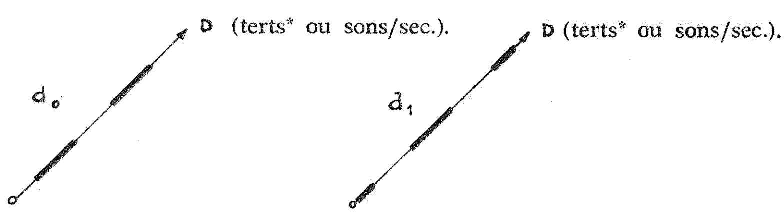
Exemple :



2° Elles comporteront deux combinaisons distinctes de plages d'intensités.



3° Elles comporteront deux combinaisons distinctes de plages de densités.



(*) Logarithmes ternaires.

4° Chacune de ces trois variables présentera un protocole pouvant être résumé par deux matrices de probabilités de transitions (MPT).

$$(\rho)\quad \begin{array}{c|cc} \downarrow & X & Y \\ \hline X & 0{,}2 & 0{,}8 \\ Y & 0{,}8 & 0{,}2 \end{array} \qquad\qquad (\sigma)\quad \begin{array}{c|cc} \downarrow & X & Y \\ \hline X & 0{,}85 & 0{,}4 \\ Y & 0{,}15 & 0{,}6 \end{array}$$

Les lettres (ρ) et (σ) constituent les paramètres des MPT.

MPTF (des fréquences)

$$(\alpha)\quad \begin{array}{c|cc} \downarrow & f_0 & f_1 \\ \hline f_0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ f_1 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{array} \qquad\qquad (\beta)\quad \begin{array}{c|cc} \downarrow & f_0 & f_1 \\ \hline f_0 & 0{,}85 & 0{,}4 \\ f_1 & 0{,}15 & 0{,}6 \end{array}$$

MPTG (des intensités)

$$(\gamma)\quad \begin{array}{c|cc} \downarrow & g_0 & g_1 \\ \hline g_0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ g_1 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{array} \qquad\qquad (\varepsilon)\quad \begin{array}{c|cc} \downarrow & g_0 & g_1 \\ \hline g_0 & 0{,}85 & 0{,}4 \\ g_1 & 0{,}15 & 0{,}6 \end{array}$$

MPTD (des densités)

$$(\lambda)\quad \begin{array}{c|cc} \downarrow & d_0 & d_1 \\ \hline d_0 & 0{,}2 & 0{,}8 \\ d_1 & 0{,}8 & 0{,}2 \end{array} \qquad\qquad (\mu)\quad \begin{array}{c|cc} \downarrow & d_0 & d_1 \\ \hline d_0 & 0{,}85 & 0{,}4 \\ d_1 & 0{,}15 & 0{,}6 \end{array}$$

5° Les transitions des variables sont indéterminées à l'intérieur de chaque MPT (processus digrammes), mais par contre leurs MPT seront liées à l'aide d'un couplage déterminé des paramètres. Le couplage est donné par les transformations univoques suivantes :

$$(e_0)\quad \downarrow\begin{matrix} f_0 & f_1 \\ \lambda & \mu \end{matrix} \quad \downarrow\begin{matrix} d_0 & d_1 \\ \alpha & \beta \end{matrix} \quad \downarrow\begin{matrix} g_0 & g_1 \\ \lambda & \mu \end{matrix} \quad \downarrow\begin{matrix} g_0 & g_1 \\ \beta & \alpha \end{matrix} \quad \downarrow\begin{matrix} f_0 & f_1 \\ \gamma & \varepsilon \end{matrix} \quad \downarrow\begin{matrix} d_0 & d_1 \\ \gamma & \varepsilon \end{matrix}$$

Par ces règles nous avons décrit la structure d'un mécanisme. Il est donc constitué par les trois paires des MPT (matrices des probabilités de transition), les MPTF, MPTG, MPTD et par le groupe (e_0) des six couplages de ces MPT.

Signification du couplage

Soit f_0 l'état des fréquences de la trame à un instant t de l'évolution sonore du mécanisme et durant une tranche de temps Δt. Soient aussi g_1 et d_1, les valeurs des autres variables de la trame à l'instant t. A l'instant suivant $t + \Delta t$, le terme f_0 devra en général changer car il obéit à l'une des deux MPTF, la (α) ou la (β). Le choix de (α) ou de (β) est conditionné par les valeurs g_1 et d_1 de l'instant t, conformément à la transformation univoque du couplage. Ainsi g_1 propose le paramètre (α) et d_1 le paramètre (β) simultanément. Autrement dit le terme f_0 devra demeurer f_0 ou céder la place à f_1 suivant le mécanisme (α) ou le mécanisme (β). Tout se passe comme si le terme f_0 se trouvait devant deux urnes (α) et (β) avec des boules de deux couleurs, rouge pour f_0 et bleue pour f_1, et dans les proportions suivantes :

Urne (α)	*Urne* (β)
0,2 boules rouges (f_0)	0,85 boules rouges (f_0)
0,8 boules bleues (f_1)	0,15 boules bleues (f_1)

Le choix est libre et le terme f_0 peut tirer son successeur soit de l'urne (α) soit de l'urne (β) avec une probabilité égale à 1/2 (probabilités totales).

Une fois que l'urne aura été choisie, le tirage d'une boule bleue ou d'une boule rouge aura une probabilité égale à la proportion des couleurs dans l'urne choisie. Et en appliquant la règle des probabilités composées, la probabilité pour que f_0 de l'instant t demeure f_0 à l'instant $t + \Delta t$ est $1/2\ (0{,}20 + 0{,}85) = 0{,}525$ et la probabilité pour qu'il change en f_1 est $1/2\ (0{,}80 + 0{,}15) = 0{,}475$.

Les cinq traits de constitution des trames ont établi un mécanisme stochastique. Ainsi dans chacune des tranches Δt de l'évolution sonore du mécanisme créé, les trois variables f_i, g_i, d_i, poursuivent une ronde de combinaisons imprévisibles, toujours changeantes au gré des trois MPT et du couplage univoque qui relie termes et paramètres.

Nous avons fondé ce mécanisme sans prendre en considération encore aucun des critères des trames. C'est-à-dire, nous avons sous-entendu une distribution topologique des plages des grains lors du choix des f_0, f_1 et g_0, g_1, mais sans préciser. De même pour la distribution des densités. Nous allons donner deux exemples de réalisations très différentes où ces deux critères seront effectifs. Mais avant de les exposer nous allons pousser l'étude du critère d'ataxie.

Nous négligerons les entropies des trois variables au niveau des grains car ce qui importe c'est le mécanisme macroscopique à l'échelle des trames.

Maintenant nous allons poser la question fondamentale des mécanismes : « Où va la transformation résumée par une MPT? Quel est son destin? ».

Considérons la MPT :

↓	X	Y
X	0,2	0,8
Y	0,8	0,2

et supposons cent mécanismes identifiés par la loi de cette unique MPT. Nous les faisons tous partir sur X et les laissons évoluer librement. La question précédente devient :

« Y a-t-il une tendance générale des états des cent mécanismes et si oui, laquelle? » (voir appendice 2).

Après la première étape les 100 X se seront transformés en .

$$0{,}2.100\ X = 20\ X \text{ et } 0{,}8.100\ Y = 80\ Y.$$

A la troisième étape 0,2 des X resteront X et 0,8 des Y deviendront X. Par contre, 0,8 des X deviendront des Y et 0,2 des Y resteront des Y. Ce raisonnement général est valable à toutes les étapes et peut s'écrire :

$$X' = 0{,}2\ X + 0{,}8\ Y$$
$$Y' = 0{,}8\ X + 0{,}2\ Y.$$

Si on veut l'appliquer aux 100 mécanismes X ci-dessus, nous aurons :

Etape	Mécanismes X	Mécanismes Y
0	100	0
1	20	80
2	68	32
3	39	61
4	57	43
5	46	54
6	52	48
7	49	51
8	50	50
9	50	50
.	.	.
.	.	.
.	.	.

Nous observerons des oscillations qui ont une tendance générale à l'« équilibre » qui s'effectue à la 8^e étape. Nous pouvons donc conclure que sur les 100 mécanismes partis sur X la huitième étape enverra selon toutes probabilités 50 en X et 50 en Y.

Les mêmes « valeurs à l'équilibre » se calculent de la façon suivante :

A l'équilibre les valeurs des X et des Y restent inchangées et le système précédent devient :

$$X = 0{,}2\ X + 0{,}8\ Y$$
$$Y = 0{,}8\ X + 0{,}2\ Y$$

soit :

$$0 = -\ 0{,}8\ X + 0{,}8\ Y$$
$$0 = +\ 0{,}8\ X -\ 0{,}8\ Y$$

et comme le nombre des mécanismes est constant, ici 100, une des deux équations peut être remplacée à l'équilibre par :

$$100 = X + Y$$

et le système devient :

$$0 = 0{,}8\ X -\ 0{,}8\ Y$$
$$100 = X + Y$$

et les valeurs X, Y, à l'équilibre sont :

$$X = 50 \text{ et } Y = 50$$

soit en proportions :

$$X = 0{,}5,\ Y = 0{,}5$$

La même méthode peut être appliquée à la MPT (σ) qui nous livrera un état à l'équilibre avec comme valeurs :

$$X = 0{,}73 \text{ et } Y = 0{,}27.$$

Une autre méthode particulièrement intéressante dans le cas d'une MPT à nombreux termes qui nous oblige, pour trouver les valeurs d'équilibre, à résoudre un long système d'équations linéaires, est celle qui utilise le calcul matriciel.

Ainsi la première étape peut être considérée comme résultante du produit matriciel de la MPT avec la matrice unicolonne $\begin{vmatrix} 100 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{r} X: \\ Y: \end{array} \begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 100 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 80 \end{vmatrix}$$

la deuxième étape :

$$\begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 20 \\ 80 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 + 64 \\ 16 + 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68 \\ 32 \end{vmatrix}$$

et la n^{me} étape :

$$\begin{vmatrix} 0{,}2 & 0{,}8 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{vmatrix}^{n} \cdot \begin{vmatrix} 100 \\ 0 \end{vmatrix}$$

A présent que nous savons calculer les valeurs à l'équilibre d'une chaîne de Markov nous pouvons facilement calculer son entropie moyenne.

La définition de l'entropie d'un système est :

$$H = -\Sigma p_i \log p_i.$$

Le calcul de l'entropie d'une MPT se fait d'abord par colonnes ($\Sigma p_i = 1$)* puis ce résultat est affecté d'un poids correspondant aux valeurs à l'équilibre. Ainsi pour la MPT (σ) :

↓	X	Y
X	0,85	0,4
Y	0,15	0,6

Entropie des états de X :

$$-0{,}85 \log 0{,}85 - 0{,}15 \log 0{,}15 = 0{,}611 \text{ bits.}$$

Entropie des états de Y :

$$-0{,}4 \log 0{,}4 - 0{,}6 \log 0{,}6 = 0{,}970 \text{ bits.}$$

Valeur de X à l'équilibre :

0,73

Valeur de Y à l'équilibre :

0,27

Entropie moyenne à l'équilibre :

$$H\sigma = 0{,}611 \,.\, 0{,}73 + 0{,}970 \,.\, 0{,}27 = 0{,}707 \text{ bits}$$

Et l'entropie de la MPT (ρ) à l'équilibre :

$$H^{\rho} = 0{,}722 \text{ bits}$$

(*) Les p_i sont les probabilités de transition de la MPT.

Les deux entropies ne diffèrent pas de beaucoup et il fallait s'y attendre car si nous observons les MPT respectives nous remarquons que : les grands contrastes des probabilités intérieures à la matrice (ρ), sont compensés par une égalité externe des probabilités à l'équilibre, par contre dans la MPT (σ) la quasi égalité intérieure de 0,4 et de 0,6 arrive à combattre le contraste intérieur 0,85 et 0,15 et le contraste extérieur 0,73 et 0,27.

A ce niveau nous pouvons modifier les MPT des trois variables f_i, g_i, d_i, de manière à obtenir une nouvelle paire d'entropies. Et cette opération étant renouvelable nous pouvons former un protocole de paires d'entropies et par conséquent une MPT des paires d'entropies. Ce sont des spéculations possibles et des recherches sans doute intéressantes.

Nous nous bornerons au premier calcul fait précédemment et nous poursuivrons l'investigation sur un plan encore plus général.

Chaine markovienne étendue aux f_i, g_i, d_i, simultanément

En page 3 nous avons analysé le mécanisme de la transformation de f_0 en f_0 ou en f_1 lorsque les valeurs des deux autres variables g_i et d_i sont données. Nous pouvons appliquer les mêmes raisonnements pour chacune des trois variables f_i, g_i, d_i, lorsque les deux autres sont données.

Exemple pour g_i :

Soit une trame à l'instant t dont les variables ont les valeurs (f_0, g_1, d_1). A l'instant $t + \Delta t$ la valeur de g_1 se transformera en g_1 ou en g_0.

De f_0 vient le paramètre (γ).

De d_1 vient le paramètre (ε).

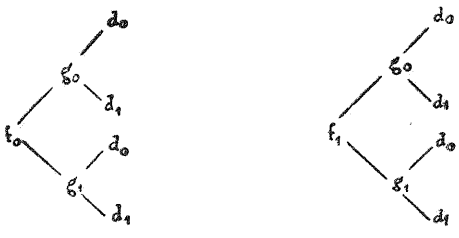
Avec la MPT (γ) la probabilité pour que g_1 demeure g_1 est 0,2. Avec la MPT (ε) la probabilité pour que g_1 demeure g_1 est 0,6. En appliquant les règles des probabilités composées et totales comme en page 101 nous obtenons que la probabilité pour g_1 de demeurer en g_1 à l'instant $t + \Delta t$ sous les effets simultanés de f_0 et de d_1 est égale à $(0{,}2 + 0{,}6)1/2 = 0{,}4$.

De même pour le calcul de la transformation de g_1 en g_0 et des transformations de d_1.

Nous tâcherons maintenant de sortir de cette forêt de combinaisons probabilistes, impossibles à manier et nous allons chercher une optique plus générale si elle existe.

En général, chaque trame étant constituée par une triade de valeurs des trois variables F, G, D, nous pouvons dénombrer les trames distinctes issues du mécanisme que nous nous sommes donné.

Voici les combinaisons possibles :



ou encore :

(f_0 g_0 d_0), (f_0 g_0 d_1), (f_0 g_1 d_0), (f_0 g_1 d_1), (f_1 g_0 d_0), (f_1 g_0 d_1), (f_1 g_1 d_0), (f_1 g_1 d_1);

soit huit trames distinctes.

Ce sont ces huit trames qui composeront avec leurs protocoles, l'évolution sonore. A chaque instant t de la composition nous rencontrons une des huit trames précédentes et pas d'autres.

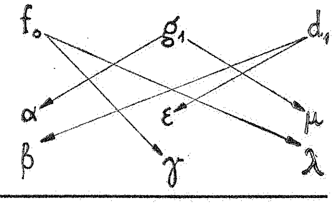
Quelles sont les règles de passage d'une combinaison à une autre? Peut-on construire une matrice de probabilités de transition de ces huit trames?

Soit la trame (f_0 g_1 d_1) de l'instant t. Peut-on calculer la probabilité pour que cette trame se transforme à l'instant $t + \Delta t$ en (f_1 g_1 d_0)?

Les opérations précédentes nous ont permis de calculer la probabilité pour que f_0 se transforme en f_1 sous l'influence de g_1 et de d_1, et pour que g_1 demeure en g_1 sous l'influence de f_0 et de d_1. Schématisons les opérations :

trame à l'instant t:

paramètres issus des transformations de couplage :



trame à l'instant $(t + \Delta t)$:	f_1	g_1	d_0
Valeurs des probabilités tirées des MPT correspondantes aux paramètres des couplages :	0,80 0,15	0,6 0,2	0,4 0,8
Probabilités indépendantes :	0,475	0,4	0,6
Probabilités composées :	$0{,}475 \cdot 0{,}40 \cdot 0{,}60 = 0{,}114$		

Conclusion :

La trame ($f_0g_1d_1$) se transforme en ($f_1g_1d_0$) avec une probabilité 0,114.

Nous pouvons donc étendre le calcul aux huit trames et construire la matrice des probabilités de transition.

Elle sera carrée et aura huit lignes et huit colonnes.

M P T Z

	→	A ($f_0\,g_0\,d_0$)	B ($f_0\,g_0\,d_1$)	C ($f_0\,g_1\,d_0$)	D ($f_0\,g_1\,d_1$)	E ($f_1\,g_0\,d_0$)	F ($f_1\,g_0\,d_1$)	G ($f_1\,g_1\,d_0$)	H ($f_1\,g_1\,d_1$)
A	($f_0\,g_0\,d_0$)	0,021	0,357	0,084	0,189	0,165	0,204	0,408	0,096
B	($f_0\,g_0\,d_1$)	0,084	0,089	0,076	0,126	0,150	0,136	0,072	0,144
C	($f_0\,g_1\,d_0$)	0,084	0,323	0,021	0,126	0,150	0,036	0,272	0,144
D	($f_0\,g_1\,d_1$)	0,336	0,081	0,019	0,084	0 135	0,024	0,048	0,216
E	($f_1\,g_0\,d_0$)	0,019	0,063	0,336	0,171	0,110	0,306	0,102	0,064
F	($f_1\,g_0\,d_1$)	0,076	0,016	0,304	0,114	0,100	0,204	0,018	0,096
G	($f_1\,g_1\,d_0$)	0,076	0,057	0,084	0,114	0,100	0,054	0,068	0,096
H	($f_1\,g_1\,d_1$)	0,304	0,014	0,076	0,076	0,090	0,036	0,012	0,144

A-t-elle une région de stabilité?

Soit 100 mécanismes Z dont le schéma est résumé par la MPTZ. A l'instant t, d_A mécanismes auront une trame A, d_B une trame B, etc..., d_H une trame H. A l'instant suivant $(t + \Delta t)$ tous les 100 mécanismes produiront des trames par exemple A avec des probabilités inscrites dans la MPTZ. Ainsi,

$0{,}021.d_A$ resteront en A,
$0{,}357.d_B$ donneront A,
$0{,}084.d_C$ donneront A,
....
$0{,}096.d_H$ donneront A.

Les d_A trames de l'instant t, deviendront d'_A trames à l'instant $t + \Delta t$, et ce nombre sera égal à la somme de toutes les trames qui seront produites par les mécanismes restants, conformément aux probabilités correspondantes. Donc :

$$(e_1)\quad \left\{\begin{array}{l} d'_A = 0{,}021\ d_A + 0{,}357\ d_B + 0{,}084\ d_C + \ldots\ldots + 0{,}096\ d_H. \\ \text{De même pour les sept autres trames :} \\ d'_B = 0{,}084\ d_A + 0{,}089\ d_B + 0{,}076\ d_C + \ldots\ldots + 0{,}144\ d_H. \\ d'_C = 0{,}084\ d_A + 0{,}323\ d_B + 0{,}021\ d_C + \ldots\ldots + 0{,}144\ d_H. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d'_H = 0{,}304\ d_A + 0{,}014\ d_B + 0{,}076\ d_C + \ldots\ldots + 0{,}114\ d_H. \end{array}\right.$$

A l'équilibre, la fréquence des trames A, B, C, ..., H, restera constante et les huit équations précédentes deviendront :

$$(d'_A = d_A,\ d'_B = d_B,\ d'_C = d_C\ \ldots\ldots\ d'_H = d_H).$$

$$(e_2)\quad \left\{\begin{array}{l} 0 = -\,0{,}979\ d_A + 0{,}357\ d_B + 0{,}084\ d_C + \ldots\ldots + 0{,}096\ d_H \\ 0 = \,0{,}084\ d_A - 0{,}911\ d_B + 0{,}076\ d_C + \ldots\ldots + 0{,}144\ d_H \\ 0 = \,0{,}084\ d_A + 0{,}323\ d_B - 0{,}979\ d_C + \ldots\ldots + 0{,}144\ d_H \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \,0{,}304\ d_A + 0{,}014\ d_B + 0{,}076\ d_C + \ldots\ldots - 0{,}856\ d_H \end{array}\right.$$

D'autre part :

$$d_A + d_B + d_C + \ldots\ldots\ldots\ldots + d_H = 100$$

Si nous remplaçons une des huit équations par la dernière, nous obtenons un système de huit équations linéaires à huit inconnues. La résolution par la méthode classique des déterminants donne les valeurs suivantes :

$$(e_3)\quad \left\{ \begin{array}{l} d_A = 0{,}17,\ d_B = 0{,}13,\ d_C = 0{,}13,\ d_D = 0{,}11,\ d_E = 0{,}14,\ d_F = 0{,}12, \\ d_G = 0{,}10,\ d_H = 0{,}10 \end{array} \right.$$

ce sont les probabilités des trames à l'équilibre.

Mais cette méthode est très laborieuse car les chances d'erreurs sont très élevées (à moins de disposer d'une calculatrice !).

La deuxième méthode (*) plus approximative mais suffisante consiste à faire partir tous les 100 mécanismes Z sur une seule trame et à les laisser évoluer tous seuls. Après quelques oscillations plus ou moins longues, l'équilibre, s'il existe, sera atteint et les proportions des trames resteront invariables.

Nous remarquons que le système d'équations (e_1) peut être décomposé en :

1. Deux vecteurs V' et V qui peuvent se représenter par deux matrices colonnes :

$$V' = \begin{vmatrix} d'_A \\ d'_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d'_G \\ d'_H \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{vmatrix} d_A \\ d_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_G \\ d_H \end{vmatrix}$$

2. Un opérateur linéaire, la matrice des probabilités de transition, Z. Par conséquent, le système (e_1) peut se résumer en une égalité matricielle.

$$(e_4)\qquad V' = Z.V$$

(*) Voir page 102.

De sorte que faire partir tous les 100 mécanismes Z sur la trame X et les laisser évoluer « librement » signifie : exercer sur le vecteur colonne

$$V = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 100 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

un opérateur linéaire :

$$Z = \begin{vmatrix} 0{,}021 & 0{,}357 & 0{,}084 & 0{,}189 & 0{,}165 & 0{,}204 & 0{,}408 & 0{,}096 \\ 0{,}084 & 0{,}089 & 0{,}076 & 0{,}126 & 0{,}150 & 0{,}136 & 0{,}072 & 0{,}144 \\ 0{,}084 & 0{,}323 & 0{,}021 & 0{,}126 & 0{,}150 & 0{,}036 & 0{,}272 & 0{,}144 \\ 0{,}336 & 0{,}081 & 0{,}019 & 0{,}084 & 0{,}135 & 0{,}024 & 0{,}048 & 0{,}216 \\ 0{,}019 & 0{,}063 & 0{,}336 & 0{,}171 & 0{,}110 & 0{,}306 & 0{,}102 & 0{,}064 \\ 0{,}076 & 0{,}016 & 0{,}304 & 0{,}114 & 0{,}100 & 0{,}204 & 0{,}018 & 0{,}096 \\ 0{,}076 & 0{,}057 & 0{,}084 & 0{,}114 & 0{,}100 & 0{,}054 & 0{,}068 & 0{,}096 \\ 0{,}304 & 0{,}014 & 0{,}076 & 0{,}076 & 0{,}090 & 0{,}036 & 0{,}012 & 0{,}144 \end{vmatrix}$$

d'une manière continue, à chaque instant t. Comme nous avons décomposé la continuité en une succession discontinue d'épaisseur temporelle Δt l'égalité (e_4) sera appliquée à chaque étape Δt.

Ainsi au départ (instant t = 0), le vecteur des populations des mécanismes sera

$$V^0$$

Après la première étape (instant $0 + \Delta t$) il sera

$$V' = Z \,.\, V^0$$

Après la deuxième étape (instant $0 + 2\Delta t$) il sera

$$V'' = Z \,.\, V' = Z^2 \, V^0$$

A la nième étape (instant $n\Delta t$) il sera

$$V^{(n)} = Z^n \,.\, V^0$$

Et en appliquant ces données au vecteur

$$V^0_H = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{vmatrix}$$

après la première étape à l'instant Δt :

$$V'_H = Z.V^0_H = \begin{vmatrix} 9{,}6 \\ 14{,}4 \\ 14{,}4 \\ 21{,}6 \\ 6{,}4 \\ 9{,}6 \\ 9{,}6 \\ 14{,}4 \end{vmatrix}$$

après la deuxième étape à l'instant $2\Delta t$:

$$V''_H = Z.V'_H = \begin{vmatrix} 18{,}941 \\ 10{,}932 \\ 14{,}477 \\ 11{,}148 \\ 15{,}156 \\ 11{,}955 \\ 8{,}416 \\ 8{,}959 \end{vmatrix}$$

après la troisième étape à l'instant $3\Delta t$:

$$V'''_H = Z.V''_H = \begin{vmatrix} 16{,}860 \\ 10{,}867 \\ 13{,}118 \\ 13{,}143 \\ 14{,}575 \\ 12{,}257 \\ 8{,}145 \\ 11{,}046 \end{vmatrix}$$

après la quatrième étape à l'instant $4\Delta t$:

$$V''''_H = Z.V'''_H = \begin{vmatrix} 17{,}111 \\ 11{,}069 \\ 13{,}792 \\ 12{,}942 \\ 14{,}558 \\ 12{,}111 \\ 8{,}238 \\ 10{,}716 \end{vmatrix}$$

Ainsi, après la 4^e étape, sur les 100 mécanismes, 17 auront en moyenne la trame A, 11 la trame B, 14 la trame C, etc., 11 la trame H.

Si nous confrontons les composantes du vecteur V'''' aux valeurs (e_3) nous remarquons que déjà à la 4^e étape nous avons presque atteint l'équilibre du système. Par conséquent, le mécanisme que nous avons bâti montre un amortissement très rapide des oscillations et une convergence très grande vers l'équilibre final, le but (Stochos). La perturbation P_H qui a été infligée au mécanisme MPTZ lorsque nous avions considéré que tous les mécanismes (ici 100) partaient sur une seule des trames était une des très fortes que nous pouvions créer.

Calculons maintenant les états des 100 mécanismes Z après la première étape avec application des perturbations maximales P.

$$\begin{array}{cccc} P_A & & P_B & \\ V_A^0 = \begin{vmatrix} 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} & V_A' = \begin{vmatrix} 2{,}1 \\ 8{,}4 \\ 8{,}4 \\ 33{,}6 \\ 1{,}9 \\ 7{,}6 \\ 7{,}6 \\ 30{,}4 \end{vmatrix} & V_B^0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} & V_B' = \begin{vmatrix} 35{,}7 \\ 8{,}9 \\ 32{,}3 \\ 8{,}1 \\ 6{,}3 \\ 1{,}6 \\ 5{,}7 \\ 1{,}4 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} P_C & & P_D & \\ V_C^0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} & V_C' = \begin{vmatrix} 8{,}4 \\ 7{,}6 \\ 2{,}1 \\ 1{,}9 \\ 33{,}6 \\ 30{,}4 \\ 8{,}4 \\ 7{,}6 \end{vmatrix} & V_D^0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} & V_D' = \begin{vmatrix} 18{,}9 \\ 12{,}6 \\ 12{,}6 \\ 8{,}4 \\ 17{,}1 \\ 11{,}4 \\ 11{,}4 \\ 7{,}6 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & P_E & & \\ V_E^0 = & \left|\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\100\\0\\0\\0\end{array}\right| & V_E' = & \left|\begin{array}{c}16{,}5\\15{,}0\\15{,}0\\13{,}5\\11{,}0\\10{,}0\\10{,}0\\9{,}0\end{array}\right| \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & P_F & & \\ V_F^0 = & \left|\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\100\\0\\0\end{array}\right| & V_F' = & \left|\begin{array}{c}20{,}4\\13{,}6\\3{,}6\\2{,}4\\30{,}6\\20{,}4\\5{,}4\\3{,}6\end{array}\right| \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & P_G & & \\ V_G^0 = & \left|\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\\0\\0\\100\\0\end{array}\right| & V_G' = & \left|\begin{array}{c}40{,}8\\7{,}2\\27{,}2\\4{,}8\\10{,}2\\1{,}8\\6{,}8\\1{,}2\end{array}\right| \end{array}$$

Récapitulation de l'analyse

Arrivés à cette étape de l'analyse nous devons faire le point.

Au niveau des cases de la trame nous possédons :

1° Des mécanismes partiels de transformation des plages de fréquence, des plages d'intensité et des plages de densité, qui s'expriment par les MPTF, MPTG, MPTD.

2° Une interréaction univoque entre les trois variables fondamentales F, G, D de la trame. [Transformations du couplage (e_0)].

Au niveau des trames, nous possédons :

1° Huit trames différentes

A, B, C, D, E, F, G, H.

2° Un mécanisme général, la MPTZ qui résume tous les mécanismes partiels et leurs interréactions.

3° Un état d'équilibre final (le but, stochos) du système Z vers lequel il tend assez rapidement.

4° Un procédé de déséquilibrage du système Z au moyen des perturbations P qui lui sont infligées.

SYNTHESE

Le mécanisme Z que nous venons de construire n'implique pas une évolution réelle des trames. Il n'établit qu'une situation dynamique, qu'une évolution en puissance. Le processus naturel est celui provoqué par une perturbation P infligée au système Z et le cheminement de ce système vers son but, vers son équilibre, une fois que la perturbation a cessé son action. Nous pouvons donc agir sur ce mécanisme par le truchement d'une perturbation telle que P, plus ou moins forte. De là, à imaginer toute une série de perturbations successives qui contraindraient l'appareil Z à se déplacer vers des régions exceptionnelles contraires à son comportement à l'équilibre, il n'y a qu'un pas. Effectivement, la valeur intrinsèque de l'organisme ainsi créé réside dans le fait qu'il doit se manifester, être. Les perturbations qui lui changent apparemment sa structure représentent autant de négations de cette existence. Et si nous composons une succession de perturbations — négations d'une part; et d'états équilibrés — existences de l'autre, nous ne faisons qu'affirmer le mécanisme Z. De sorte que d'abord nous proposons, nous mettons en évidence son existence en soi, positivement et ensuite nous le confirmons dans son essence en lui opposant les états perturbateurs, négativement. Le bi-pôle être une chose et ne pas être cette chose crée un tout, l'objet que nous nous proposions de fabriquer au début de l'application. Une dialectique duale est ainsi à la base de cette attitude compositionnelle, dialectique qui impose la marche à suivre. Les sciences « expérimentales » sont l'expression de ce raisonnement sur un plan analogue. Une expérience établit un corps de données, un réseau qu'elle dégage, à l'aide de négations et de transformations infligées à ce corps, du magma de la réalité objective. Et la répétition des opérations duales est une condition fondamentale sur laquelle repose tout l'univers de la connaissance. Constater une seule fois n'est pas définir. Et la causalité se confond avec la répétition de phénomènes considérés identiques.

En conclusion, cette dialectique duale dont nous nous armons pour composer dans le cadre de ces mécanismes est homothétique à celle des sciences expérimentales et nous pouvons étendre la comparaison, à celle des êtres biologiques, à celle des êtres tout court, ce qui nous ramène au point de départ.

Ainsi, il faut proposer un être, ensuite lui infliger une modification. Il va sans dire que proposer l'être ou sa modification signifie dans notre cas précis de composition musicale, donner les moyens à un observateur humain de percevoir les deux propositions et de les comparer. Puis répéter suffisamment de fois les oppositions, être et changement, pour identifier l'être.

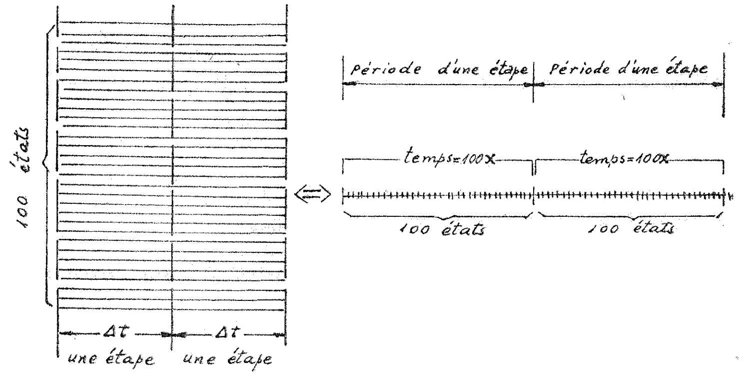
Que signifie l'identification dans le cas de notre mécanisme Z ?

Parenthèse

Nous avions supposé au cours de l'analyse que 100 mécanismes Z étaient présents simultanément, et que nous suivions les règles de jeux de ces mécanismes à chaque instant d'une évolution créée par un déplacement hors de la zone d'équilibre. Nous comparions donc les états de 100 mécanismes d'un Δt aux états de ces 100 mécanismes du Δt suivant. De sorte que comparer deux étapes successives du groupe de 100 états simultanés signifie, *dénombrer* deux fois cent états. Le dénombrement en tant qu'action abstraite implique des opérations ordonnées : observer un par un les 100 mécanismes, les classer, les trier, puis, à l'étape suivante, recommencer avec les 100 nouveaux et finalement comparer les classes nombre contre nombre. Et si l'observation de chaque mécanisme nécessite une fraction de temps x, pour dénombrer 200 mécanismes il faudrait disposer d'un temps 200 x.

Ce raisonnement nous permet donc de transposer dans l'abstrait une simultanéité en une succession lexicographique (temporelle) sans enlever un tant soit peu de la définition des transformations engendrées par le schéma Z.

Ainsi comparer deux étapes successives des 100 mécanismes Z, revient à comparer 100 états produits dans un intervalle de temps 100 x à 100 autres états produits dans un intervalle de temps également 100 x.



IDENTIFICATION MATÉRIELLE DU MÉCANISME Z

Identification du mécanisme Z signifie confrontation entre elles de toutes ses possibilités d'être, essentiellement : états perturbés contre états à l'équilibre, et indépendamment de l'ordre.

L'identification s'établira sur des périodes de temps 100 x égales, suivant le diagramme

Phénomène :	$P_N \rightarrow$	$E \rightarrow$	$P_M \rightarrow$	E...
Temps :	100 x	100 x	100 x	100 x...

P_N et P_M représentent des perturbations quelconques et E l'état de Z à l'équilibre.

Une alternance de P et de E est un protocole dans lequel 100 x est l'unité de temps (100 x = période de l'étape).

Exemple : P_A P_A E E E P_H P_G P_G E P_C...

Un nouveau mécanisme W peut être construit avec une MPT, etc., qui régirait l'identification, l'évolution de la composition sur des ensembles de temps plus généraux.

Nous ne poursuivrons pas l'investigation dans cette voie car elle nous mènerait trop loin.

Une réalisation qui va suivre utilisera un diagramme cinématique très simple de perturbations P et d'équilibre E conditionnés d'une part, par les degrés de perturbations P et de l'autre, par une sélection librement consentie.

(e_5) $\quad E \rightarrow P^0_A \rightarrow P'_A \rightarrow E \rightarrow P'_C \rightarrow P^0_C \rightarrow P^0_B \rightarrow P'_B \rightarrow E \rightarrow P'_A$

DÉFINITION DE L'ÉTAT E ET DES PERTURBATIONS P

D'après ce qui précède, l'état à l'équilibre E sera exprimé par une suite de trames telles que :

Protocole E (Z)

ADFFECBDBCFEFADGCHCCHBEDFEFFECFEHBFFF
BCHDBABADDBADADAHHBGADGAHDADGFBEBGABEBB...

Pour effectuer ce protocole, nous pouvons utiliser huit urnes [A] [B] [C] [D] [E] [F] [G] [H] chacune contenant des boules de huit couleurs différentes dont les proportions sont données par les probabilités des colonnes de la MPTZ. Par exemple l'urne [G] contiendra 40,8 % de boules rouges A, 7,2 % de boules oranges B, 27,2 % de boules jaunes C, 4,8 % de boules marron D, 10,2 % de boules vertes E, 1,8 % de boules bleues F, 6,8 % de boules blanches G, et 1,2 % de boules noires H. De même pour les sept autres urnes.

Nous tirons au hasard de l'urne [G] une boule jaune C. Nous notons le résultat et nous remettons la boule dans l'urne [G]. Nous tirons au hasard de l'urne [C] une boule verte E. Nous notons le résultat et nous remettons la boule dans l'urne [C]. Nous tirons au hasard de l'urne [E] une boule noire H. Nous notons le résultat et nous remettons la boule dans l'urne [E]. Nous tirons au hasard de l'urne [H] une boule, etc.

Le protocole noté jusqu'ici est le suivant : G C E H...

Protocole P^0_A (V^0_A)

Il est évidemment

A A A A...

Protocole P'_A (V'_A)

Nous considérons une urne Y dont les boules de huit couleurs sont dans les proportions suivantes :

2,1	%	de	couleur	A.
8,4	%	de	—	B.
8,4	%	de	—	C.
33,6	%	de	—	D.
1,9	%	de	—	E.
7,6	%	de	—	F.
7,6	%	de	—	G.
30,4	%	de	—	H.

Après chaque tirage, nous remettons la boule dans l'urne Y et un protocole très probable sera de la composition suivante :

GFFGHDDCBHGGHDDHBBHCDDDCGDDDDFDDHHHBFFHDBHD HHCHHECHDBHHDHHFHDDGDAFHHHDFDG...

Protocole P'_C (V'_C)

La même méthode nous fournit un protocole de P'_C

EEGFGEFEEFADFEBECGEEAEFBFBEADEFAAEEFHABFECHFEB EFEEFHFAEBFFFEFEEAFHFBEFEEB...

Protocole P^0_C (V^0_C)
C C C C C C C C C C C...

Protocole P^0_B (V^0_B)
B B B B B B B B B B B...

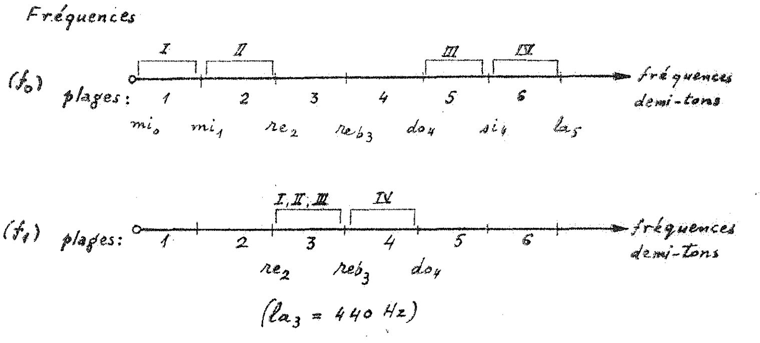
Protocole P'_B (V'_B)
AAADCCECDCAACEBAFGBCAAADGCDDCGCADGAAGECCAACAAHA ACGCDAACDAABD CCCGACACAACACB...

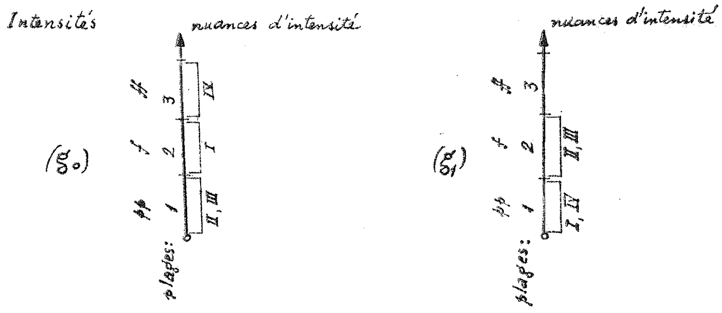
RÉALISATION « ANALOGIQUE A » POUR ORCHESTRE.

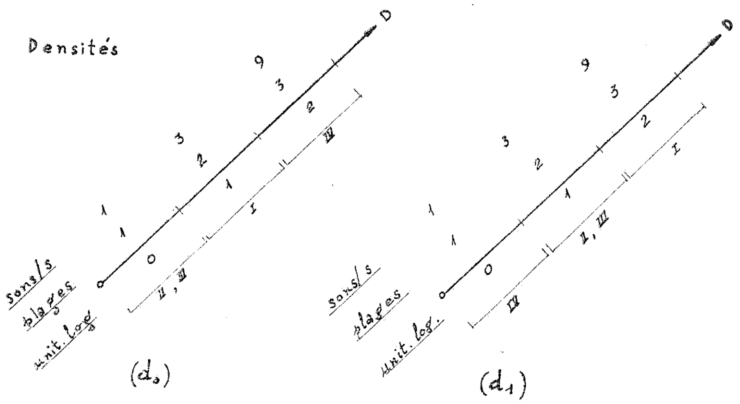
L'exemple instrumental ci-dessous récapitule point par point l'exposé fait jusqu'ici dans les limites des instruments d'orchestre, de l'exécution et de l'écriture conventionnelle.

Le mécanisme qui sera utilisé est le système Z qui a déjà été traité numériquement.

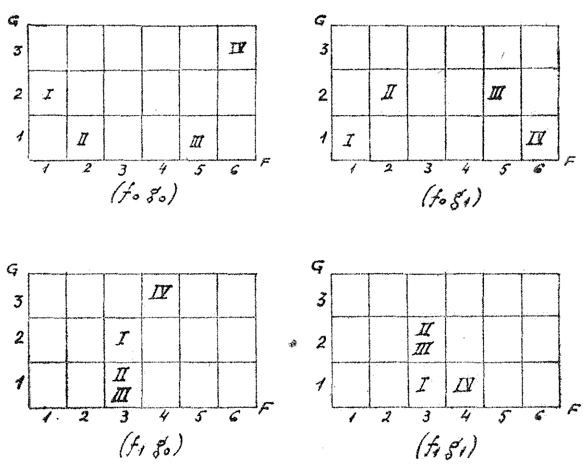
Choix des variables des trames :



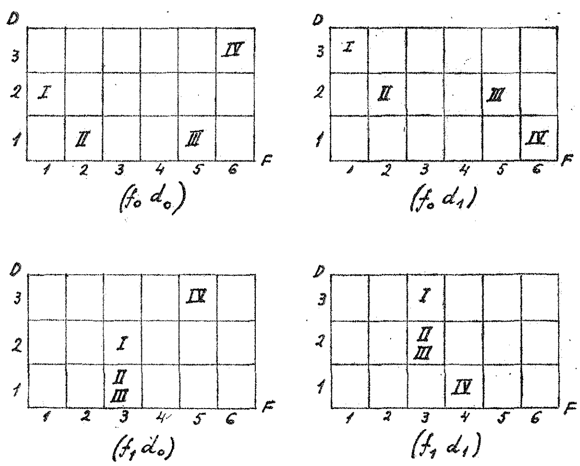




Ce choix nous donne les trames partielles FG suivantes :



et les trames partielles FD suivantes :



Les trames partielles GD étant une conséquence des FG et FD.

Les chiffres romains sont les agents de liaison entre toutes les cases des trois plans de référence, FG, FD, GD, de manière que les diverses combinaisons (f_i, g_i, d_i) prévues théoriquement soient possibles.

Exemple : soit la trame (f_1, g_1, d_0) et l'être sonore C_3 correspondant à la plage des fréquences n° 3.

D'après les trames partielles ci-dessus, cet être sera la somme arithmétique des grains des cases I, II, III, à trois dimensions, qui sont situées sur la plage des fréquences n° 3. $C_3 = I + II + III$.

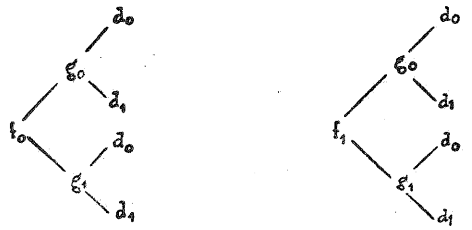
Les dimensions de la case correspondante à I sont : ΔF = plage 3,ΔG = plage 1,ΔD = plage 2;

Les dimensions de la case correspondante à II sont : ΔF = plage 3,ΔG = plage 2,ΔD = plage 1;

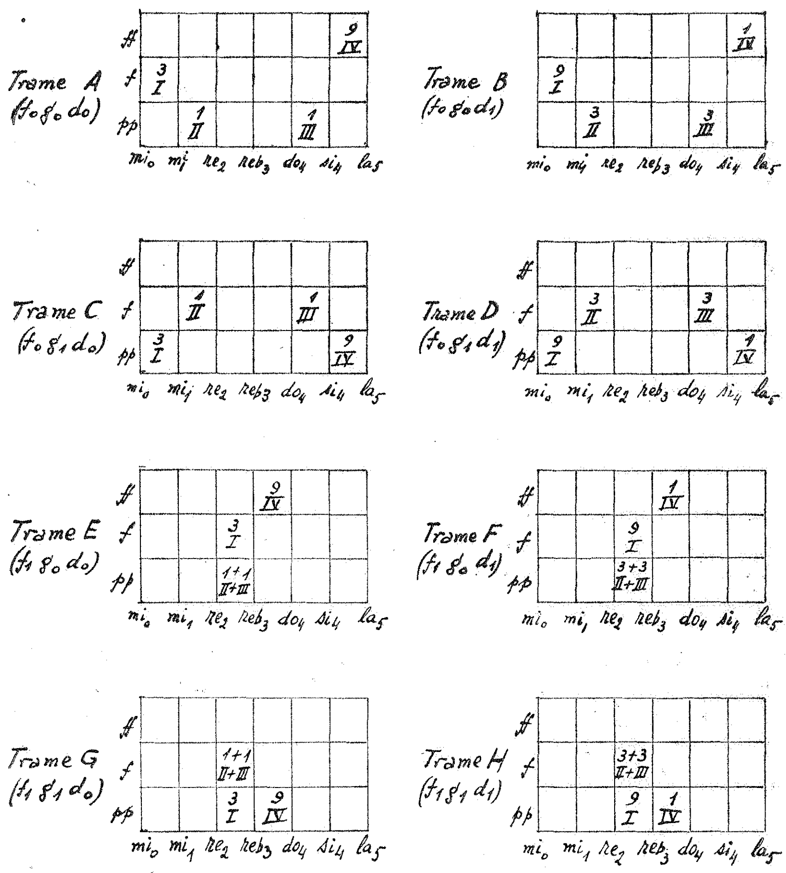
Les dimensions de la case correspondante à III sont : ΔF = plage 3,ΔG = plage 2,ΔD = plage 1.

Par conséquent dans cet être sonore les grains auront des fréquences comprises dans la plage 3, des intensités comprises dans les plages 1 et 2 et ils formeront des densités comprises dans les plages 1 et 2 avec les correspondances énoncées ci-dessus.

Les huit trames principales A, B, C, D, E, F, G, H, qui découlent des combinaisons



seront les suivantes :



Nota : les chiffres inscrits dans les cases sont les densités moyennes : grains/sec

La durée Δt, de chaque trame est de 1,11 sec. soit : une blanche égale 54 MM. C'est pendant cette durée que doivent se réaliser les densités des cases occupées.

La période de temps nécessaire à l'exposition du protocole de chaque étape, (du protocole à l'équilibre et des protocoles des perturbations) est de 30 Δt soit 15 rondes, (une ronde = 27 MM).

L'enchaînement des perturbations et des équilibres de la MPTZ est donné par le diagramme cinématique qui a été choisi à cet effet.

$$(e_5) \qquad E \rightarrow P^0_A \rightarrow P'_A \rightarrow E \rightarrow P'_C \rightarrow P^0_C \rightarrow P^0_B \rightarrow P'_B \rightarrow E \rightarrow P'_A$$

L'exemple de la partition de musique (*) barres 105 à 115, comprend une section de la perturbation P^0_B et de la P'_B. Le changement de période s'effectue à la barre 109. Les trames sont disposées comme suit :

105 109 115

..... | BB | BB | BB | BB | AA | GE | CC | AA | CA | AH | ....

Fin de la période de perturbation P^0_B $\rightarrow | \leftarrow$ début de retour à l'équilibre (perturbation P'_B).

La réalisation « Analogique A » remplace les grains élémentaires sinusoïdaux par des nuages très ordonnés de grains élémentaires qui restituent le timbre des cordes. Une réalisation avec des instruments classiques ne saurait en aucun cas, en raison des limites humaines de jeux, donner des trames dont le timbre puisse être de nature différente de celui des cordes.

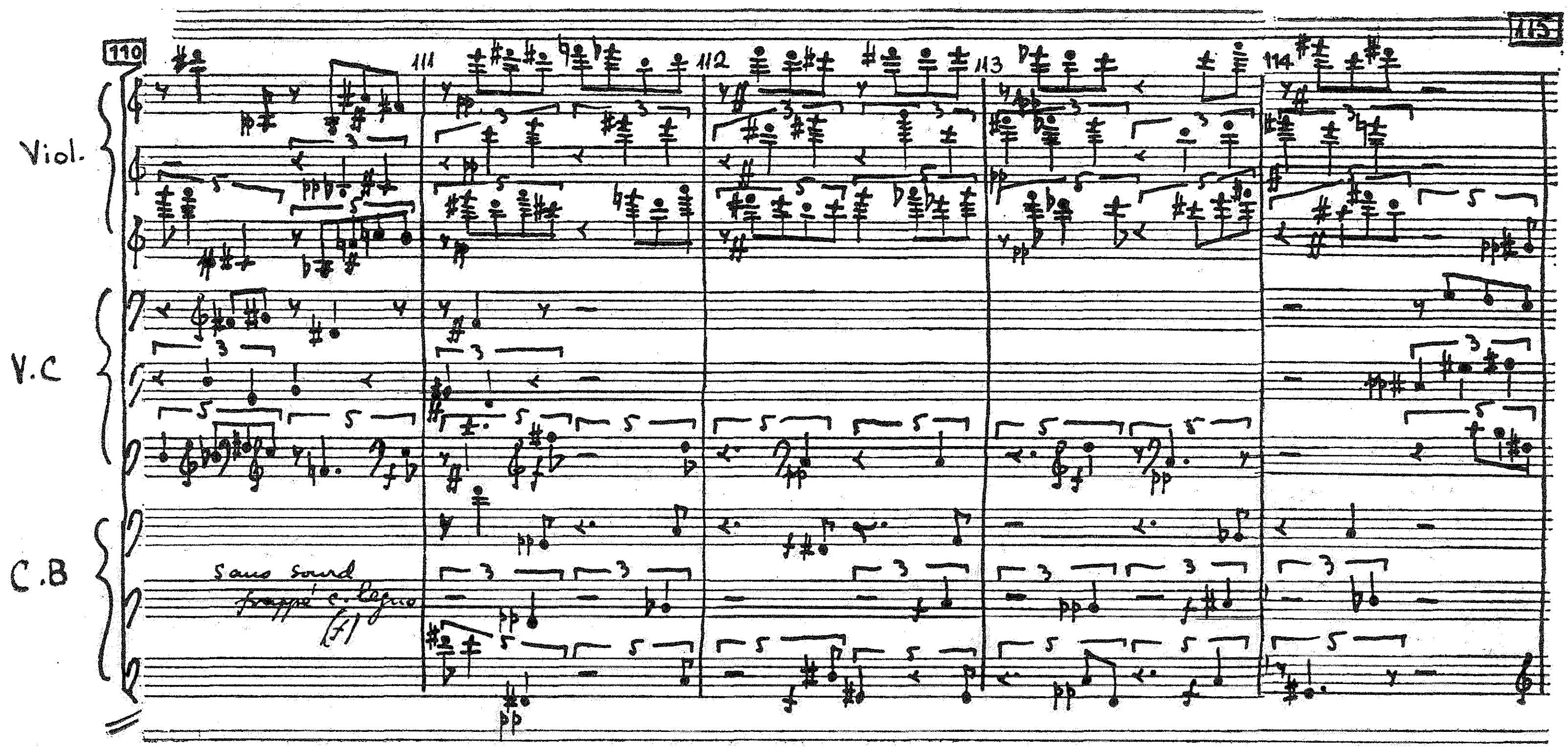
L'hypothèse donc d'une sonorité de deuxième ordre ne pourrait dans ces conditions se trouver ni confirmée ni infirmée.

Par contre une réalisation avec des moyens électromagnétiques puissants tels que des cerveaux électroniques, machines analogiques, etc., devrait permettre la démonstration d'une sonorité de premier ordre, à base de grains élémentaires sinusoïdaux, ou du type de Gabor.

Tout en souhaitant la technique qui se fait attendre nous allons montrer des trames plus complexes réalisables avec les moyens d'un studio électroacoustique ordinaire qui disposerait de plusieurs pistes magnétiques ou de magnétophones synchrones, de filtres et de générateurs de sons sinusoïdaux.

(*) Pour des raisons techniques, les trames E, F, G, H, ont été légèrement simplifiées.

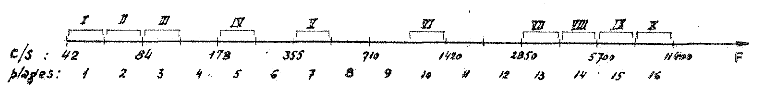
Extrait de Analogique A
(mesures 105 à 109)


110
111
112
113
114
115
Viol.
V.C
C.B
Sans sourd
frappé c. legno
(f)
pp

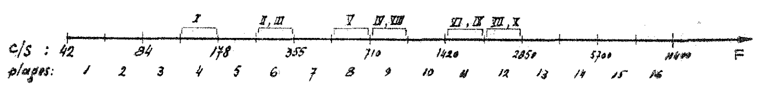
EXEMPLE EXTRAIT DE « ANALOGIQUE B » ŒUVRE DE MUSIQUE ÉLECTROMAGNÉTIQUE (sons sinusoïdaux).

On choisit :

1° Deux groupes de plages de fréquences : f_0, f_1.



(f_0)



(f_1)

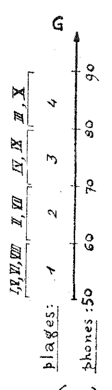
Les protocoles de ces deux groupes seront tels qu'ils obéiront encore aux MPT précédentes :

(α) ↓	f_0	f_1
f_0	0,2	0,8
f_1	0,8	0,2

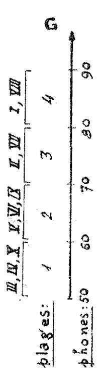
(β) ↓	f_0	f_1
f_0	0,85	0,4
f_1	0,15	0,6

dont (α) et (β) sont les paramètres.

2° Deux groupes de plages d'intensités : g_0, g_1.



(g_0)



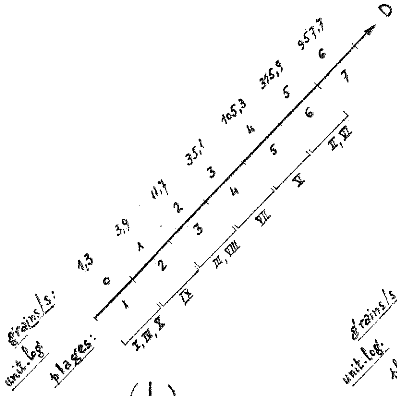
(g_1)

Les protocoles de ces groupes obéiront encore aux mêmes MPT paramétrées :

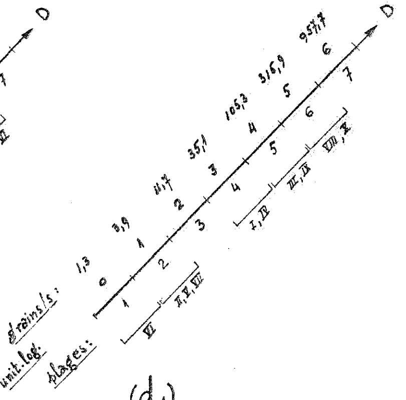
	↓	g_0	g_1
(γ)	g_0	0,2	0,8
	g_1	0,8	0,2

	↓	g_0	g_1
(ε)	g_0	0,85	0,4
	g_1	0,15	0,6

3° Deux groupes de plages de densités : d_0, d_1.



(d_0)



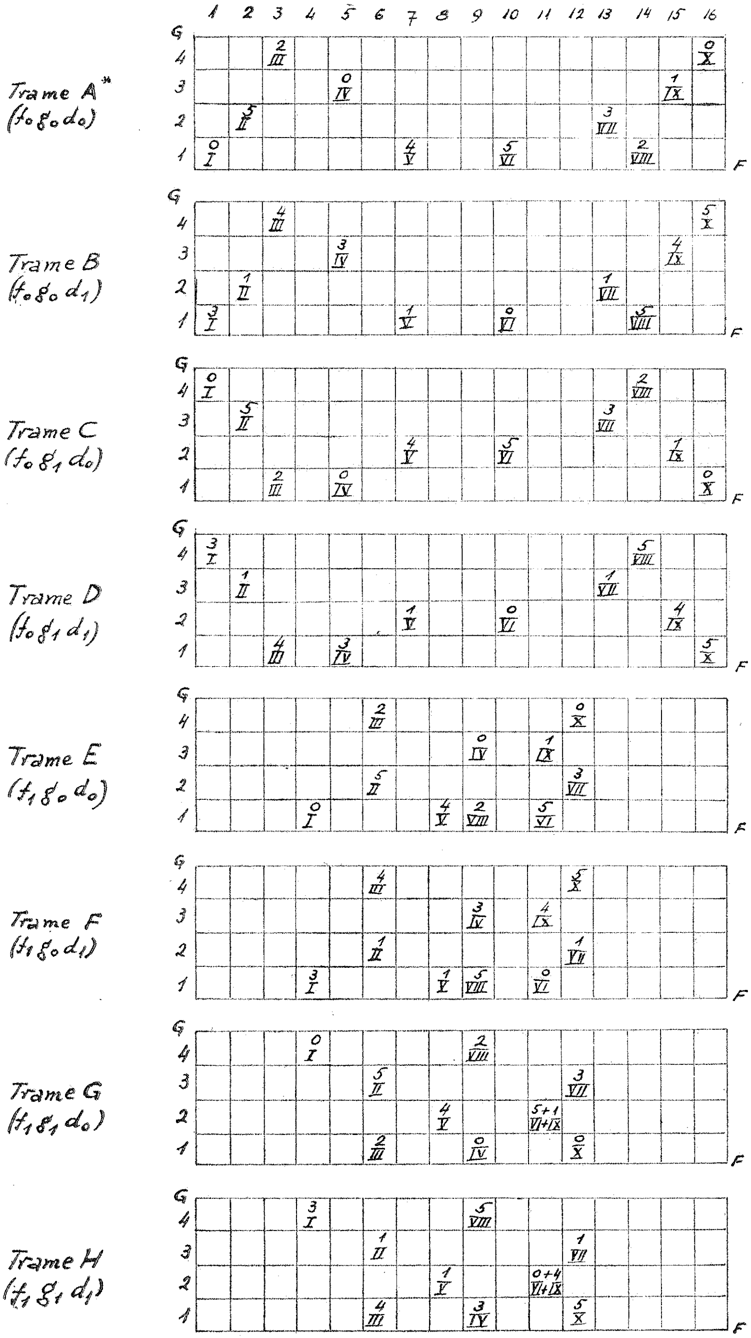
(d_1)

Les protocoles de ces groupes obéiront encore aux mêmes MPT paramétrées :

	↓	d_0	d_1
(λ)	d_0	0,2	0,8
	d_1	0,8	0,2

	↓	d_0	d_1
(μ)	d_0	0,85	0,4
	d_1	0,15	0,6

Ce choix nous donne les trames principales A, B, C, D, E, F, G, H.



(*) Les chiffres arabes au-dessus des chiffres romains des cases indiquent la densité en unités logarithmiques. Ainsi, la case (10,1) aura une densité de [(log 1,3/log 3 + 5] terts soit 315,9 grains/sec. en moyenne.

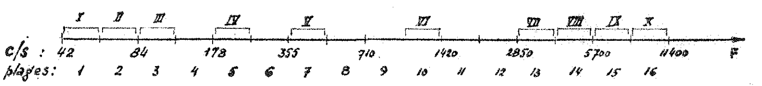
La durée Δt de chaque trame est de 0,5 sec. environ. La période d'exposition d'une perturbation ou d'un état équilibré est d'environ 15 sec.

Nous choisissons le même protocole des échanges entre perturbations et équilibre de la MPTZ, celui d' « ANALOGIQUE A ».

$$(e_5) \qquad E \rightarrow P^0_A \rightarrow P'_A \rightarrow E \rightarrow P'_C \rightarrow P^0_C \rightarrow P^0_B \rightarrow P'_B \rightarrow E \rightarrow P'_A$$

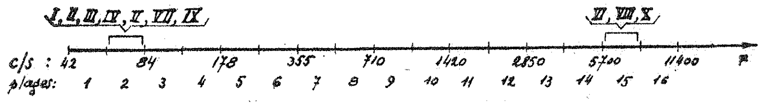
Les trames de « ANALOGIQUE B » calculées jusqu'ici constituent un choix spécial. Au cours de cette composition musicale d'autres trames sont utilisées plus particulièrement mais obéissant toujours aux mêmes règles de couplage ainsi qu'à la même MPTZ. Effectivement si l'on considère les combinaisons des plages de la variable f_i d'une trame, nous nous apercevons que sans altérer le nom de la variable f_i nous pouvons lui changer la structure.

Ainsi pour (f_0) nous avions les plages suivantes, dotées de chiffres romains pour établir la liaison avec les plages des deux autres variables :



(f_0)

Mais nous aurions pu choisir une autre combinaison (f_0) :



(f_0)

La question se pose : « Etant donné n divisions Δ F (plages sur F) quel est le nombre total de combinaisons possibles des plages Δ F? »

1er cas : Aucune des n plages n'est utilisée.

La trame correspondante à cette combinaison est silencieuse.

Le nombre de ces combinaisons sera $\dfrac{n!}{(n - 0)!0!}$ (= 1).

2^{me} cas : 1 des n plages est occupée. Le nombre des combinaisons sera

$$\frac{n!}{(n - 1)!1!}$$

3^{me} cas : 2 des n plages sont occupées. Le nombre des combinaisons sera

$$\frac{n!}{(n - 2)!2!}$$

....

m^{e} cas : m des n plages sont occupées. Le nombre des combinaisons sera

$$\frac{n!}{(n - m)!m!}$$

....

n^{e} cas : n des plages sont occupées. Le nombre des combinaisons sera

$$\frac{n!}{(n - n)!n!}$$

Le nombre total des combinaisons sera égal à la somme de toutes les précédentes :

$$\frac{n!}{(n - 0)!0!} + \frac{n!}{(n - 1)!1!} + \frac{n!}{(n - 2)!2!} + \cdots$$

$$+ \frac{n!}{[n - (n - 1)]!(n - 1)!} + \frac{n!}{(n - n)!n!} = 2^n$$

Le même raisonnement est valable pour les deux autres variables d'une trame.

Ainsi pour l'intensité, si k est le nombre de plages ΔG disponibles, le nombre total des variables g_i sera 2^k et pour la densité, si r est le nombre de plages ΔD disponibles, le nombre total des variables d_i sera 2^r.

Par conséquent, le nombre total des trames possibles sera :

$$T = 2^{n+k+r}$$

Dans le cas de « ANALOGIQUE B » nous pourrions obtenir :

$$2^{16+4+7} = 2^{27} = 134\,217\,728 \text{ trames distinctes.}$$

Remarque importante. — Nous avions admis dans la première partie de ce livre que la richesse d'une évolution musicale, évolution basée sur la méthode de protocoles stochastiques des variables couplées des trames, était fonction des transformations des entropies de ces variables. D'après le calcul précédent nous nous apercevons que sans modifier les entropies des MPTF, MPTG, MPTD, nous pouvons obtenir une évolution supplémentaire sous-jacente, en utilisant les diverses combinaisons des plages (critère topologique).

Ainsi dans « ANALOGIQUE B » les MPTF, MPTG et MPTD ne varieront pas. Par contre, les f_i, g_i et d_i auront dans le déroulement du temps, des structures nouvelles, corollaires des combinaisons changeantes de leurs plages.

CONCLUSIONS COMPLÉMENTAIRES SUR LES TRAMES ET LEURS TRANSFORMATIONS

1° *Règle.* — Pour former une trame on peut choisir une quelconque combinaison de plages sur F, sur G et sur D, les f_i, g_i, d_i.

2° *Condition fondamentale.* — Chaque plage d'une des variables F, G, D doit pouvoir s'associer à une plage correspondante des deux autres variables et dans tous les couplages choisis. (Ceci s'effectue à l'aide des chiffres romains).

3° Cette association est arbitraire (choix libre) pour deux paires, celle de la troisième paire étant obligée, conséquence des deux premières.

Exemple : L'association des chiffres romains de f_i avec ceux de g_i est libre;

L'association des chiffres romains de f_i avec ceux de d_i est libre;

L'association des chiffres romains de g_i avec ceux de d_i est obligée, conséquence des deux premières associations.

4° Les composantes f_i, g_i, d_i des trames ont en général des protocoles stochastiques qui se correspondent étape par étape.

5° Les MPT de ces protocoles seront en général couplées à l'aide de paramètres.

6° Si F, G, D sont les « variations » (nombre des composantes f_i, g_i, d_i, respectivement), le nombre maximum de couplages entre les composantes et les paramètres de MPTF, MPTG, MPTD est la somme des produits GD + FG + FD.

Exemple de « ANALOGIQUE A » ou « B » :

$$\begin{array}{lll} F = 2, (f_0,\ f_1) & \text{les paramètres des MPT sont :} & \alpha,\beta \\ G = 2, (g_0,\ g_1) & & \gamma,\varepsilon \\ D = 2, (d_0,\ d_1) & & \lambda,\mu \end{array}$$

et les couplages sont :

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} & f_0 & f_1 & & f_0 & f_1 & & g_0 & g_1 & & g_0 & g_1 & & d_0 & d_1 & & d_0 & d_1 \\ \Big\downarrow & \gamma & \varepsilon & \Big\downarrow & \lambda & \mu & \Big\downarrow & \beta & \alpha & \Big\downarrow & \lambda & \mu & \Big\downarrow & \alpha & \beta & \Big\downarrow & \gamma & \varepsilon \end{array}$$

soit 12. Effectivement FG + FD + GD = 4 + 4 + 4 = 12.

7° Si F, G, D sont les « variations » (nombre des composantes f_i, g_i, d_i, respectivement) le nombre des trames T possibles est le produit, F.G.D.

Exemple : F = 2, (f_0, f_1) G = 2, (g_0, g_1) D = 2, (d_0, d_1);
T = 2.2.2 = 8.

8° Le protocole des trames est stochastique (au sens large) et peut se résumer, lorsque la chaîne est ergodique (tendant à se régulariser), par une MPTZ. Cette matrice aura F.G.D. lignes et autant de colonnes.

Projection spatiale.

Dans tout ce chapitre nulle mention n'a été faite de la spatialisation du son.

En effet, le sujet était lié à la conception fondamentale d'un complexe sonore et de son évolution en soi. Pourtant rien n'empêche d'élargir la technique exposée dans ce chapitre et de « sauter » dans l'espace. Nous pouvons par exemple imaginer des protocoles de trames attachés à tel ou tel point de l'espace avec des probabilités de transitions, avec des couplages espaces-sons, etc... La méthode est prête, l'application générale est possible avec les enrichissements en retour qu'elle peut créer.

CHAPITRE III

STRATÉGIE MUSICALE

STRATÉGIE, PROGRAMMATION LINÉAIRE ET COMPOSITION MUSICALE.

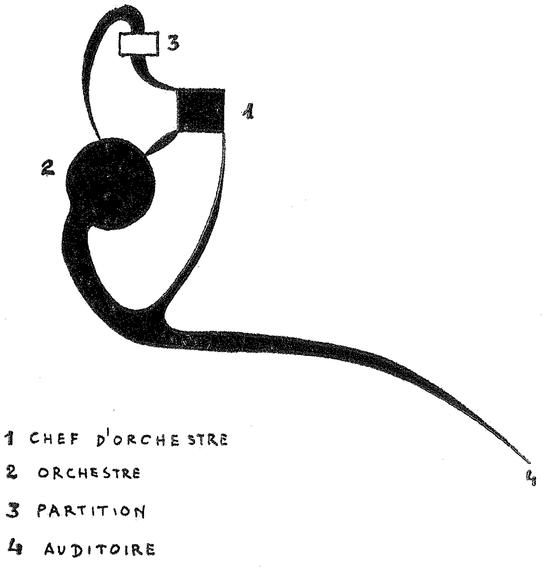
Avant de passer au problème de la mécanisation de la musique stochastique, par l'emploi des ordinateurs, nous allons nous promener dans un domaine plus riant, celui des jeux, de leur théorie et de l'application en composition musicale.

STRATÉGIE MUSICALE

MUSIQUES AUTONOMES

Le compositeur de musique établit un schéma (pattern) que le chef et les instrumentistes sont appelés à suivre plus ou moins rigoureusement. Depuis les ultimes détails, notes, attaques, intensités, timbres, manières de jouer, jusqu'à la forme générale, tout est virtuellement inscrit dans la partition. Et même dans le cas où l'auteur laisse une marge d'improvisation plus ou moins grande au chef, à l'instrumentiste, à la machine, ou aux trois à la fois, le déroulement du discours sonore suit un chemin en ligne ouverte sans *boucle de retour*. Le modèle-partition qui leur est donné une fois pour toutes n'engendre pas de *conflit* autre que celui de sa « bonne » exécution technique et de son « expression musicale » voulue ou suggérée par l'auteur de la partition. On pourrait appeler *conflit interne* cette opposition entre la réalisation sonore et le schème symbolique qui lui sert de trame, les chefs, les instrumentistes et les machines jouant les rôles de systèmes comparateurs et correcteurs analogues à ceux des systèmes asservis, des meules reproductrices de profils. De façon générale nous pouvons admettre que la nature des oppositions d'ordre technique (instrumentale et de direction) ou même de celles se rapportant à la logique esthétique du discours musical, est *interne* aux œuvres écrites jusqu'ici. Les tensions sont enfermées dans la partition, même lorsque, comme il a été fait depuis quelque temps, l'on utilise des processus stochastiques peu ou prou définis.

Cette classe traditionnelle de *conflit interne* pourrait être qualifiée : *Musique autonome.*



MUSIQUES HETERONOMES

Il serait pourtant intéressant et probablement très fécond d'envisager une autre classe de discours musical qui introduirait une notion de *conflit externe* entre, par exemple, deux orchestres ou deux instrumentistes opposés. Le jeu d'une des parties influerait et conditionnerait celui de l'autre et réciproquement. Le discours sonore s'identifierait donc à une succession très stricte, quoique souvent stochastique, d'actes d'opposition sonore, qui découleraient et de la volonté des deux chefs d'orchestre (ils peuvent être plusieurs) et de la volonté de l'auteur, le tout en une harmonie dialectique supérieure.

Pour fixer les idées, admettons un conflit entre deux orchestres ayant chacun un chef. Chacun des chefs dirige les opérations sonores *contre* les opérations de l'autre chef. Chaque opération représente une *tactique* et la rencontre de deux tactiques peut avoir une valeur qualitative ou numérique, au bénéfice de l'un et au détriment de l'autre. Cette valeur est inscrite dans une grille (matrice) à l'intersection de la ligne correspondante à la tactique *i* du chef A et de la colonne correspondante à la tactique *j* du chef B. C'est le *règlement partiel ij.* Ce jeu défini à *somme nulle,* est un *duel.*

La mise en conflit externe (hétéronomie) peut revêtir toutes sortes de formes mais peut toujours être résumée par une *Matrice des Règlements* conformément à la Théorie Mathématique des Jeux qui démontre aussi qu'en général il y a une manière parfaite de jouer pour A qui lui garantirait à la longue un minimum de supériorité (de gain) sur B, quoique fasse B et réciproquement, il existe pour B une manière parfaite de jouer qui lui garantirait à la longue un maximum d'infériorité (de perte) sur A quoique fasse A. Le gain minimum de A et la perte garantie maxima de B, coincident en valeur absolue et se nomment *valeur du jeu.*

L'introduction en musique d'un conflit externe, d'une *hétéronomie,* n'est pas tout à fait sans précédent. Dans certaines musiques de tradition populaire en Europe et dans d'autres continents, il existe des formes musicales conflictuelles où deux instrumentistes s'évertuent à se désarçonner mutuellement. L'un prend l'initiative et essaie de « décrocher » du tandem soit rythmiquement soit mélodiquement, tout en demeurant dans le contexte musical de la tradition qui permet cette improvisation de type spécial. En particulier aux Indes, cette virtuosité contradictoire est très répandue, notamment entre joueurs de tabla et de sarod.

Une *hétéronomie musicale* basée sur la science moderne est ainsi légitimée même aux yeux des plus conformistes. Mais le problème n'est pas la justification historique d'une nouvelle aventure; bien au contraire, c'est l'enrichissement et le bond en avant qui importe. Tout comme à la complexité de la polyphonie linéaire et à la logique déterministe du discours musical, les processus stochastiques apportaient une belle généralisation et du même coup une ouverture insoupçonnée sur une esthétique totalement asymétrique qualifiée encore de non-sens, de même, l'*hétéronomie* introduit en musique stochastique un complément de structure dialectique.

On peut également imaginer des mises en conflit de deux ou de plusieurs instrumentistes; d'un seul aussi avec ce qu'il est convenu d'appeler la nature; d'un orchestre ou de plusieurs orchestres avec le public. Mais le *caractère fondamental de cette situation est qu'il existe un gain et une perte, une victoire et une défaite, qui pourraient s'exprimer d'une part par une récompense morale ou matérielle sous forme de prix, de médaille, de coupe, etc. et d'autre part par une pénalisation.*

Un jeu *dégénéré* est celui dans lequel les parties jouent arbitrairement en suivant des parcours plus ou moins « improvisés », mais sans conditionnement conflictuel, donc sans valeur compositionnelle. C'est un faux jeu.

Un jeu sonore (ou de lumière) aurait un sens *trivial* si on faisait une utilisation gratuite de sons et de constructions sonores afin de jouer à la manière des jeux des cafés, des juxe-box, des machines à sous etc.; d'ailleurs un industriel clairvoyant pourrait tirer un bénéfice substantiel de cette idée.

Un sens moins trivial serait donné par un jeu éducatif dans les écoles qui ferait réagir les enfants (ou les adultes) devant des combinaisons sonores (ou lumineuses) dont eux-mêmes détermineraient l'intérêt esthétique donc les règles et les règlements, au moyen d'instruments de musique ou d'appareils électromagnétiques.

Enfin l'intérêt fondamental exposé plus haut résiderait dans le conditionnement mutualiste entre les parties, conditionnement qui tout en respectant la diversité plus grande du discours musical et une certaine liberté des joueurs, impliquerait une influence forte d'un auteur unique.

Nous pouvons d'ailleurs généraliser ce point de vue à la spatialisation de la musique (en introduisant un facteur espace), et même étendre les jeux aux arts de la lumière.

Le problème des jeux, sur le plan du calcul, devient rapidement difficile et tous les jeux n'ont pas reçu un éclaircissement mathématique suffisant, par exemple les jeux à plusieurs joueurs. De ce fait, nous allons nous borner à un cas relativement simple, celui du duel, extrait de notre œuvre « DUEL » pour deux chefs et deux orchestres.

Analyse de l'œuvre « DUEL ».

Cette œuvre composée en 1958-59, fait appel à des notions relativement simples, de constructions sonores mises en correspondances par la volonté des chefs qui sont eux-mêmes conditionnés par l'auteur.

Nous avons adopté les événements suivants :

L'événement I		est un nuage de grains sonores tels que les pizz., les frappés avec le bois de l'archet, et les coups d'archet très brefs distribués stochastiquement;
L'événement II	=	tenues de cordes en parallèle avec fluctuations;
L'événement III	=	réseaux de glissandi de cordes entrecroisés;
L'événement IV	=	percussions stochastiques;
L'événement V	=	instruments à vent stochastiques;
L'événement VI	=	silence.

Chacun des événements est écrit sur partition de manière très précise et de longueur suffisante, de façon qu'à n'importe quel instant et suivant son choix instantané, le chef puisse en découper une tranche sans que cela nuise à l'identité de l'événement. Nous impliquons donc une homogénéité globale dans l'écriture de chaque événement, tout en conservant les fluctuations locales.

Nous établissons une liste des couples x,y des événements simultanés issus des deux orchestres X et Y, avec nos appréciations subjectives :

Couple (x,y) = (y,x)	Qualification	Couple (x,y) = (y,x)	Qualification
(I, I)	passable (p)	(II,V) = (V, II)	passable⁺ (p+)
(I, II) = (II, I)	bon (b)	(III,III)	passable (p)
(I,III) = (III, I)	bon⁺ (b+)	(III,IV) = (IV, III)	bon⁺ (b+)
(I,IV) = (IV, I)	passable⁺ (p+)	(III,V) = (V, III)	bon (b)
(I, V) = (V, I)	très bon (b++)	(IV,IV)	passable (p)
(II,II)	passable (p)	(IV,V) = (V, IV)	bon (b)
(II,III) = (III, II)	passable (p)	(V,V)	passable (p)
(II,IV) = (IV, II)	bon (b)		

Ecrivons cette liste sous forme de tableau :

Chef Y

Chef X		I	II	III	IV	V	Minimum par ligne :
	I	p	b	b^{+}	p^{+}	b^{++}	p
	II	b	p	p	b	p^{+}	p
	III	b^{+}	p	p	b^{+}	b	p
	IV	p^{+}	b	b^{+}	p	b	p
	V	b^{++}	p^{+}	b	b	p	p
Maximum par colonne :		b^{++}	b	b^{+}	b^{+}	b^{++}	

Cette matrice qualitative indique que le plus grand minimum par ligne et le plus petit maximum par colonne ne coïncident pas, ($b \neq p$) et que par conséquent, le jeu n'a pas de point d'équilibre donc pas de tactique unique. L'introduction de la tactique du silence (VI) modifie la matrice précédente en :

Chef Y

Chef X		I	II	III	IV	V	VI	
	I	p	b	b^{++}	b^{+}	b^{+}	p	p
	II	b	p	p	b	p^{+}	p	p
	III	b^{++}	p	p	b^{+}	b	p	p
	IV	b^{+}	b	b^{+}	p	b	p	p
	V	b^{+}	p^{+}	b	b	p	p	p
	IV	p	p	p	p	p	p^{-}	p^{-}
		b^{++}	b	b^{++}	b^{+}	b^{+}	(p)	

Cette fois le jeu a plusieurs points d'équilibre; toutes les tactiques sont possibles, mais une étude plus attentive montre que le conflit est encore trop lâche, car le chef Y a intérêt à ne jouer que la tactique VI (= silence), tandis que celle du chef X peut être choisie indifféremment parmi les I, II, III, IV, V. Il ne faut pas non plus oublier que les règlement de cette matrice sont établis au bénéfice du chef X et que le jeu sous cette forme n'est pas équitable. De plus les règlements sont trop flous. Pour poursuivre notre étude, nous tâcherons de préciser les valeurs qualitatives en les ordonnant sur un axe et leur faisant correspondre une échelle numérique grossière, en outre, nous modifierons la valeur du couple (VI, VI) :

p^-	p	p^+	b	b^+	b^{++}
0	1	2	3	4	5

et la matrice devient :

	I	II	III	IV	V	VI	
I	1	3	5	4	4	1	1
II	3	1	1	3	2	1	1
III	5	1	1	4	3	1	1
IV	4	3	4	1	3	1	1
V	4	2	3	3	1	1	1
VI	1	1	1	1	1	3	1
	5	3	5	4	4	3	

Elle n'a pas de point d'équilibre, elle n'a pas de stratégie dominante, elle n'a pas de symétrie (diagonale $\neq 0$), pas plus que de solution simple. Pour la trouver nous allons appliquer une méthode approximative qui d'ailleurs se prête facilement à un traitement par ordinateurs, tout en modifiant mais le moins possible, l'équilibre relatif des nombres inscrits dans la matrice, de manière à trouver une stratégie unique, c'est-à-dire une multiplicité pondérée de tactiques mais dont aucune ne doit être nulle. Je ne puis donner tous les calculs successifs, mais la matrice résultante de cette méthode est la suivante: (cf. bibl. 21, pp. 215...)

Chef Y

		I	II	III	IV	V	VI	
	I	2	3	4	2	3	2	18
	II	3	2	2	3	3	2	4
Chef X	III	4	2	1	4	3	1	5
	IV	2	4	4	2	2	2	5
	V	3	2	3	3	2	2	11
	VI	2	2	1	2	2	4	15
		9	6	8	12	9	14	Total 58

avec les deux stratégies uniques pour X et Y telles qu'elles sont inscrites en marge de la matrice. Le chef X doit donc jouer les tactiques I, II, III, IV, V, VI, dans les proportions 18/58, 4/58, 5/58, 5/58, 11/58, 15/58 respectivement et le chef Y doit jouer les tactiques I, II, III, IV, V, VI, dans les proportions 9/58, 6/58, 8/58, 12/58, 9/58, 14/58, respectivement. La valeur du jeu est d'après cette méthode, environ 2,5 au bénéfice du chef X (jeu à somme nulle mais encore non équitable).

Nous remarquons immédiatement que la matrice n'est plus symétrique par rapport à sa diagonale ce qui veut dire que les couples des tactiques ne sont plus commutatifs. Exemple : (IV, II $=$ 4) $\neq$ (II, IV $=$ 3). Il existe une orientation issue de l'ajustement du calcul et qui est en fait un enrichissement du jeu.

L'étape suivante sera le contrôle expérimental de la matrice.

Deux méthodes sont possibles :

a. Simuler le jeu, c'est-à-dire se substituer mentalement aux deux chefs X et Y successivement en suivant les règlements de la matrice étape par étape, sans mémoire et sans bluff pour tester le cas le moins intéressant :

Etapes	1e	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e	11e	12e	13e	14e	15e	16e	17e	18e	19e	20e	21e
Chef X	I.		III		I		VI		I		III		VI		IV		III		III		IV
Chef Y		IV		III		VI		III		I		VI		III		V		II		III	IV
Règl/ts	2	4	1	4	2	4	1	4	2	4	1	4	1	4	2	3	2	2	1	4	

Valeur du jeu, 52/20 = 2,6 points au bénéfice de X.

b. En choisissant les tactiques au hasard mais avec des fréquences proportionnelles aux nombres marginaux de la matrice précédente :

Etapes	1e	2e	3e	4e	5e	6e	7e	8e	9e	10e	11e	12e	13e	14e	15e	16e	17e	18e	19e	20e	21e
Chef X	I		VI		VI		II		I		II		V		IV		I		V		V
Chef Y		VI		VI		V		III		I		IV		VI		V		IV		VI	III
Règl/ts	2	4	4	4	2	3	2	4	2	3	3	3	2	2	2	3	2	3	2	2	3

Valeur du jeu, 57/21 = 2,7 points au bénéfice de X.

Nous constatons que les valeurs expérimentales du jeu sont très proches de la valeur calculée par approximation. Par ailleurs les processus sonores issus des deux expériences sont satisfaisants.

Nous pouvons maintenant appliquer une méthode rigoureuse pour la définition des stratégies de X,Y et de la valeur du jeu. Pour cela nous utiliserons les méthodes de la programmation linéaire et en particulier la méthode de la matrice inverse. (cf. bibl. 22).

Cette méthode est basée sur deux énoncés :

1° C'est le théorème fondamental de la théorie des jeux, ou « théorème du minimax », suivant lequel le règlement minimum (maximin) correspondant à la stratégie optimale de X est toujours égal au règlement maximum (minimax) correspondant à la stratégie optimale de Y.

2° Le calcul de la valeur maximin (ou minimax) ainsi que les probabilités des stratégies optimales d'un duel, se ramènent à la résolution d'un couple de problèmes duals de programmation linéaire (méthode duale du simplexe).

Ici nous allons simplement poser le système des équations linéaires du joueur du minimum, Y.

Soit y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, les probabilités correspondantes aux tactiques I, II, III, IV, V, VI, de Y et v la valeur du jeu qu'il faut minimiser. Nous avons les liaisons suivantes :

$$\begin{array}{l}
y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 = 1 \\
2y_1 + 3y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 3y_5 + 2y_6 + y_7 = v \\
3y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + 3y_5 + 2y_6 + y_8 = v \\
2y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 2y_6 + y_9 = v \\
3y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 2y_5 + 2y_6 + y_{10} = v \\
2y_1 + 2y_2 + y_3 + 2y_4 + 2y_5 + 4y_6 + y_{11} = v \\
4y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 + 3y_5 + y_6 + y_{12} = v
\end{array}$$

Pour aboutir à une stratégie unique, le calcul conduit à la modification du règlement (III, IV = 4) en (III, IV = 5). La solution donne les stratégies optimales suivantes :

pour X : Tactiques	Probabilités	pour Y : Tactiques	Probabilités
I	2/17	I	5/17
II	6/17	II	2/17
III	0	III	2/17
IV	3/17	IV	1/17
V	2/17	V	2/17
VI	4/17	VI	5/17

et pour valeur du jeu, v = $(42/17) \triangleq 2{,}47$ points.

Nous constatons que X doit abandonner complètement la tactique III (Probab. III = 0), ce que nous voulons éviter.

En modifiant le règlement (II, IV = 3) en (II, IV = 2), nous obtenons les stratégies optimales suivantes :

pour X : Tactiques	Probabilités	pour Y : Tactiques	Probabilités
I	14/56	I	19/56
II	6/56	II	7/56
III	6/56	III	6/56
IV	6/56	IV	1/56
V	8/56	V	7/56
VI	16/56	VI	16/56

et pour valeur du jeu, $v = \dfrac{138}{56} \triangleq 2{,}47$ points.

Les règlements ayant été peu modifiés, la valeur du jeu n'a pratiquement pas bougé, par contre les stratégies optimales ont largement varié. Un calcul rigoureux était donc nécessaire, et la dernière matrice accompagnée de ses stratégies calculées est la suivante :

Chef Y

		I	II	III	IV	V	VI	
	I	2	3	4	2	3	2	14
	II	3	2	2	2	3	2	6
Chef X	III	4	2	1	5	3	1	6
	IV	2	4	4	2	2	2	6
	V	3	2	3	3	2	2	8
	VI	2	2	1	2	2	4	16
								Total
		19	7	6	1	7	16	56

En appliquant les opérations élémentaires aux lignes et aux colonnes de cette matrice de manière à rendre le jeu équitable (valeur du jeu = 0), nous obtenons la matrice équivalente :

Chef Y

		I	II	III	IV	V	VI	
	I	—13	15	43	—13	15	—13	14/56
	II	15	—13	—13	—13	15	—13	6/56
Chef X	III	43	—13	—41	71	15	—41	6/56
	IV	—13	43	43	—13	—13	—13	6/56
	V	15	—13	15	15	—13	—13	8/56
	VI	—13	—13	—41	—13	—13	43	16/56
		$\frac{19}{56}$	$\frac{7}{56}$	$\frac{6}{56}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{7}{56}$	$\frac{16}{56}$	

avec une valeur de jeu nulle.

Cette matrice étant de lecture difficile, on la simplifie en divisant tous les règlements par + 13; elle devient :

Chef Y

		I	II	III	IV	V	VI	
	I	−1	+1	+3	−1	+1	−1	14/56
	II	+1	−1	−1	−1	+1	−1	6/56
Chef X	III	+3	−1	−3	+5	+1	−3	6/56
	IV	−1	+3	+3	−1	−1	−1	6/56
	V	+1	−1	+1	+1	−1	−1	8/56
	VI	−1	−1	−3	−1	−1	+3	16/56
		$\frac{19}{56}$	$\frac{7}{56}$	$\frac{6}{56}$	$\frac{1}{56}$	$\frac{7}{56}$	$\frac{16}{56}$	

avec une valeur de jeu, v = — 0,07, ce qui signifie qu'à la fin du jeu, au règlement final, le chef Y devra rendre 0,07.m points au chef X, m étant le nombre total d'étapes.

Convertissons maintenant cette matrice numérique en matrice qualitative grâce à la correspondance :

$\underbrace{-1 \quad -3}_{p} \qquad \underbrace{+1}_{p^{+} \quad b \quad b^{+}} \qquad \underbrace{+3 \quad +5}_{b^{++}}$

et la dernière matrice devient :

p	p^+	b^{++}	p	b	p
p^+	p	p	p	p^+	p
b^{++}	p	p	b^{++}	p^+	p
p	b^{++}	b^{++}	p	p	p
p^+	p	p^+	p^+	p	p
p	p	p	p	p	b^{++}

elle n'est pas tellement différente de celle du début sauf en ce qui concerne le couple (VI, VI) du silence qui est à l'opposé. Le calcul est terminé.

La déviation mathématique a permis d'assouplir le duel et de faire ressortir par exemple, un paradoxe, celui du couple (VI, VI), caractérisant le silence complet. Le silence est à éviter, mais pour ce faire il est nécessaire d'augmenter sa potentialité.

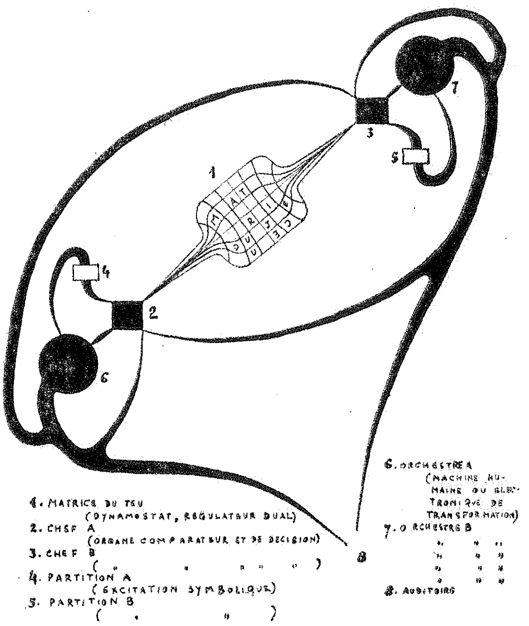
Il est impossible de décrire dans ces pages le rôle fondamental du traitement mathématique de ce problème, les raisonnements subtils qu'il nous force de faire en cours de route, réclament une vigilance de chaque instant et partout présente sur la surface de la matrice. C'est un exemple de travail où le détail est dominé par l'ensemble et inversement. C'est pour mettre en valeur ce labeur intellectuel que nous avons jugé utile d'exposer le processus du calcul.

Les chefs dirigent en se tournant le dos, soit avec des signaux des doigts soit avec des signaux lumineux qui sont invisibles de l'orchestre adverse. Si les chefs disposent de signaux lumineux commandés par des boutons, les règlements partiels peuvent être signalisés automatiquement sur des panneaux lumineux visibles de la salle, comme pour les matchs de football.

Si les chefs ne disposent que de leurs doigts, alors un arbitre pourrait compter les points et faire apparaître manuellement les règlements partiels sur des panneaux visibles de la salle. Au bout d'un certain nombre de coups ou de minutes, suivant l'accord des chefs, l'un des deux est déclaré vainqueur et a droit au prix qui lui est remis officiellement.

Nous pouvons, maintenant que le principe est exposé, envisager l'intervention du public qui serait invité à se prononcer sur l'appréciation qualitative des couples de tactiques des chefs X,Y et lui laisser par voie de scrutin et sur place, le droit de constituer la matrice de jeu. A ce moment, la musique sera le résultat d'un conditionnement dû au compositeur qui a établi les partitions, aux deux chefs X, Y et au public qui construit la matrice des règlements.

Voici, valable également pour *Stratégie*, composée en 1962, l'organigramme bicéphale de *Duel* :



Règles de l'œuvre «STRATEGIE»

Deux orchestres placés à gauche et à droite sur la scène avec deux chefs qui se tournent le dos, ou sur deux plateaux diamétralement opposés, peuvent choisir et jouer une des six constructions sonores, numérotées dans la partition de I à VI, que nous nommerons tactiques, qui sont de structure stochastique et qui ont été calculées par le cerveau électronique 7090 IBM à Paris. Outre ces six tactiques fondamentales, chacun des chefs peut faire jouer à son orchestre des combinaisons simultanées par deux ou par trois des tactiques fondamentales.

Voici la liste des six tactiques fondamentales :

I	Vents;
II	Percussion;
III	Caisses des cordes frappées avec la main;
IV	Pointillisme des cordes;
V	Glissandi des cordes;
VI	Tenues harmoniques des cordes.

Voici maintenant les treize combinaisons compatibles et simultanées de ces tactiques pour chacun des deux orchestres :

I & II = VII	II & III = XII	I & II & III = XVI
I & III = VIII	II & IV = XIII	I & II & IV = XVII
I & IV = IX	II & V = XIV	I & II & V = XVIII
I & V = X	II & VI = XV	I & II & VI = XIX
I & VI = XI		

Il existe en tout 19 tactiques que chacun des chefs peut faire exécuter par son orchestre. Par conséquent les deux chefs peuvent faire jouer simultanément 19.19 = 361 couples possibles.

Règles du jeu

1° *Choix des tactiques.*— Comment les chefs choisiront-ils les tactiques à jouer?

a. Une première solution consiste en un choix arbitraire. Par exemple le premier chef X choisit la tactique I. Le deuxième chef Y peut choisir n'importe laquelle des 19 tactiques y compris la I. Puis le chef X, en fonction du choix de Y, choisit une nouvelle tactique (ou maintient la même), qu'il joue pendant un certain temps (voir § 7). Le deuxième choix de X est arbitraire en fonction de son goût et du choix de Y. A son tour le chef Y choisit une nouvelle tactique (ou maintient la même) en fonction du choix de X et de son propre goût, qu'il joue pendant un certain temps facultatif. Et ainsi de suite. Nous obtenons ainsi une succession arbitraire des combinaisons des structures de base, I, II, III, IV, V, VI.

b. Une deuxième solution est que les chefs pour définir le choix d'une nouvelle tactique fassent un tirage au sort en tirant une carte d'un jeu de 19 cartes. Ou bien en pondérant le tirage en tirant d'une urne des billes comportant des numéros de 1 à 19 mais en proportions différentes. Ces opérations peuvent se faire avant l'exécution de l'œuvre et les résultats des tirages successifs peuvent être inscrits sous forme de plan séquentiel, que chacun des chefs aura sous les yeux pendant la réalisation.

c. Une troisième solution est que les chefs se concertent à l'avance et qu'ils choisissent une succession fixe qu'ils dirigeront.

d. Une quatrième solution est la direction des deux orchestres par un seul chef qui aura établi la succession des tactiques au préalable suivant une des méthodes précédentes et qu'il fixera sur un Plan Directeur, qu'il suivra pendant l'exécution. Cette 4^{e} solution constitue une solution dégénérée du conflit dual.

e. Enfin, une cinquième solution qui est la plus intéressante est celle qui introduit le conflit dual entre les deux chefs. Dans ce cas les couples des tactiques des deux chefs sont exprimés en points que gagne l'un des chefs et que perd l'autre conformément à la matrice du jeu.

2° *Limitation du jeu.* — Le jeu est limité en général, de plusieurs manières :

a. Les chefs se fixent une limite supérieure de points. Celui qui y parvient le premier est gagnant.

b. Ils se fixent un nombre de parties défini à l'avance : soit n parties. Celui qui a obtenu le maximum de points à la fin de la n^{me} partie est gagnant.

c. Ils se fixent une durée totale du jeu, soit m secondes (ou minutes) et celui qui a le plus grand nombre de points à la n^{me} seconde (ou minute) est gagnant.

3° *L'attribution des points* peut se faire de deux manières :

a. Il existe un ou deux arbitres qui comptent les points sur deux colonnes : une pour le chef X en nombres positifs, l'autre pour le chef Y en nombres également positifs. Ce sont eux qui arrêtent le jeu d'après la convention de la limitation et qui annoncent les résultats au public.

b. Il n'y a pas d'arbitre mais un système automatique qui consiste en un tableau individuel pour chacun des chefs, avec n.n boutons correspondants aux points (règlements partiels) de la matrice utilisée. Ces boutons sont dans des cases dans lesquelles sont inscrits les points (règlements partiels). Par exemple, supposons que la matrice du jeu soit la grande (19.19 cases), alors si le chef X choisit la tactique XV contre la IV du chef Y, le chef X appuie sur le bouton qui se trouve à l'intersection de la ligne XV et de la colonne IV. A cette intersection correspond donc une case dans laquelle est inscrit le règlement partiel 28 points pour X et le bouton que devra pousser le chef X. Chacun des boutons est relié à une petite additionneuse qui totalisera les résultats sur un panneau électrique de manière qu'ils soient visibles par le public au fur et à mesure du déroulement du jeu à la manière des panneaux des stades, à une échelle bien entendu réduite.

4° *L'attribution des lignes (et des colonnes)* se fait par un jeu de pile ou face entre les deux chefs.

5° *Désignation du partant.* Une fois que les lignes et les colonnes ont été attribuées il reste à définir le chef qui ouvre le jeu. Cette décision est prise par un deuxième jeu de pile ou face.

6° *Lecture des tactiques.* Elles sont jouées cycliquement en boucle fermée. Ainsi l'arrêt d'une tactique se fait instantanément sur une barre de mesure laissée au choix du chef. La reprise ultérieure de cette même tactique doit se faire à partir de la barre de mesure précédemment définie. Les tactiques dans la partition ont des durées d'au moins deux minutes. Arrivés à la fin de la tactique les chefs recommencent à son début. D'où le da capo inscrit sur la partition.

7° *Durée des parties (coups).* La durée de chaque coup est facultative. Toutefois, il est bon de définir une limite inférieure de l'ordre de 15". C'est-à-dire que si un chef engage une tactique, il doit la maintenir pendant au moins 15 sec. Ces 15" peuvent varier de concert à concert. Elles constituent un souhait de la part du compositeur mais pas une obligation, et les chefs ont le droit de décider avant le jeu de la durée limite inférieure de chaque coup.

La limite supérieure n'existe pas car le jeu conditionne le maintien ou le changement d'une tactique.

8° *Issue du combat.* — Pour accuser la structure duale de cette composition et pour rendre hommage au chef qui suit le plus fidèlement le conditionnement imposé par l'auteur au moyen de la matrice du jeu, on peut admettre à la fin du combat :

a. La proclamation du vainqueur,

b. L'attribution d'un prix, bouquet de fleurs ou coupe ou médaille que l'organisateur du concert voudra bien mettre à la disposition des arbitres.

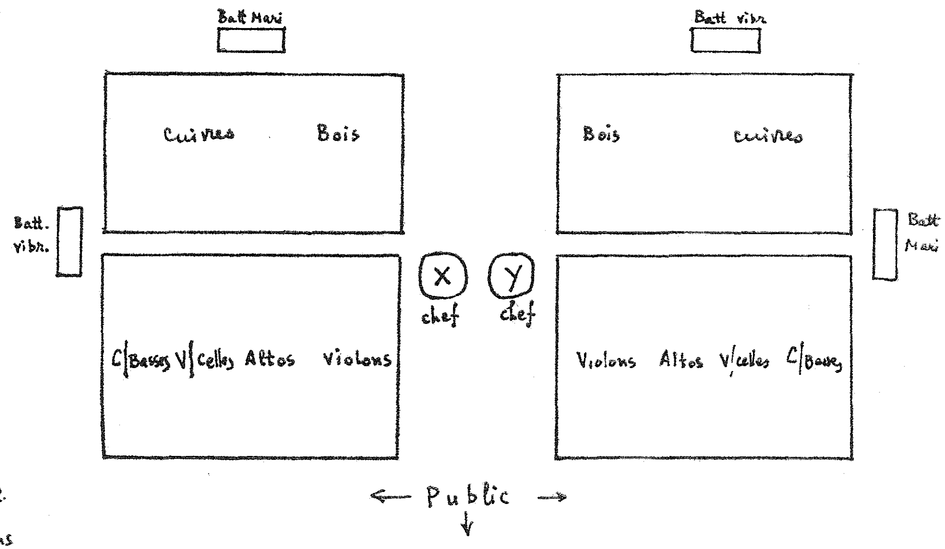
9° *Choix de la matrice.* — Dans « STRATEGIE » il existe deux matrices une petite 3.3 et une grande 19.19. Celle de 19.19 cases contient tous les règlements partiels des couples des tactiques fondamentales I à VI et leurs combinaisons. Celle de 3.3 cases les contient également mais de la manière suivante : la ligne 1 et la colonne 1 contiennent les tactiques fondamentales de I à VI sans discrimination; la ligne 2 et la colonne 2 contiennent les combinaisons compatibles deux à deux des tactiques fondamentales; enfin la ligne 3 et la colonne 3 contiennent les combinaisons compatibles trois à trois des tactiques fondamentales. Le choix entre les deux matrices dépend de la facilité de lecture qu'auront les chefs. Les règlements positifs des cases signifient un gain pour le chef X et automatiquement une perte symétrique pour le chef Y. Inversement, les règlements négatifs des cases signifient une perte pour le chef X et automatiquement un gain symétrique pour le chef Y.

STRATEGIE

Disposition des orchestres sur un seul plateau

Composition par orchestre:

1 Piccolo
1 Gr. Flûte
2 Ht/Bois
1 Clar Mib
1 Clar Sib
1 Clar Basse
1 Fagot
1 Contrefagot
2 Cors
1 Tromp.
2 Tromb.
1 Tuba
2 Percuss.
a) 1 Vibraph.
b) 1 Marimb.
c) Maracas
Cymb. susp
G. Caisse
4 Toms
2 Bongos
2 Congas
5 Temples
4 Wood-Bl.
5 Cloches
8 1ers violons
8 2e violons
4 Altos
4 V/celles
3 C/Basses
44 Instrument.



La disposition de chaque orchestre dans le cas de deux plateaux est classique.

Total pour les deux orchestres $2 \times 44 = 88$ instrumentistes

STRAT EGIE

MATRICE DES REGLEMENTS. DUEL, (VALEUR DU JEU = O).

CHEF Y (colonnes)

CHEF X (LIGNES)

	I	II ●	III H	IV ∵	V ✱	VI ≡	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	
I	116	10	84	-48	4	-52	-60	-40	132	-44	-8	-36	-22	24	-46	102	138	-38	32	2
● II	-56	96	-44	-22	-24	52	-50	-14	12	28	6	-48	-20	-16	-10	-24	-36	-20	44	3
H III	-110	-2	96	96	24	0	4	-56	-32	-24	4	-52	-48	-40	-16	-44	-16	20	72	1
∵ IV	0	-20	24	84	4	-12	12	-12	-28	8	-8	-24	-40	4	22	-10	-16	28	-16	11
✱ V	-110	-204	-86	4	104	-8	44	20	-8	4	8	-8	-38	-24	-16	40	8	20	-24	1
≡ VI	24	44	12	-14	-6	64	24	-8	24	4	-24	-40	-52	-44	24	44	4	4	-48	7
VII	-56	-52	20	16	36	44	44	4	-52	-48	0	-46	-36	-12	-20	-40	-44	16	40	4
VIII	-32	-8	-52	-8	12	4	4	48	-44	-12	8	-52	-4	8	32	-36	-40	-16	24	3
IX	-36	10	-16	-32	2	4	-44	-52	52	44	2	48	-18	64	24	22	-36	-28	-52	6
X	-48	22	-22	4	-4	32	-46	-16	8	-36	-24	-4	8	32	24	4	-8	20	-32	4
XI	4	24	26	-4	4	-28	-36	-12	20	4	64	68	4	40	-12	-2	-24	-27	-32	10
XII	-36	-196	-188	-28	-34	-42	36	32	24	0	-32	74	76	-4	4	-32	-28	40	76	7
XIII	166	-20	-42	-40	-52	-44	14	-16	4	22	-14	80	72	-26	-58	40	-18	78	42	2
XIV	32	-14	-34	0	-32	-52	36	12	-12	36	24	-28	42	76	-48	-64	-30	-29	72	5
XV	-20	8	4	28	-28	14	0	20	2	-4	-32	14	26	-56	46	-36	12	-8	14	4
XVI	88	88	104	-28	20	16	-2	-16	20	-20	-50	-26	-8	-36	-40	108	-24	-33	60	9
XVII	32	92	52	-28	16	8	-44	-48	-32	0	-16	-16	-20	-32	24	-30	96	52	-36	8
XVIII	-36	-24	8	4	0	-2	52	78	-12	-4	36	-8	28	-24	-16	-14	42	-12	-40	9
XIX	-52	-52	-66	4	6	-6	-4	44	-66	-4	44	12	44	40	16	-46	44	-42	-32	4
	1	1	2	3	7	11	3	3	4	6	9	2	5	7	10	4	4	8	10	: 100

VENTS
● PERC. NORM.
H CORDES : PERC. CAISSE
∵ CORDES : PIZZ., ETC...
✱ CORDES : GLISS.
≡ CORDES : TENUES

(VENTS + PERC) SIM.
⋮
(VENTS + PERC + CORDES PERC) SIMULTANEMENT

I. Xenakis
6T/VENISE · 101062

STRATEGIE

MATRICE DES REGLEMENTS.
DUEL, (VALEUR DU JEU=0).

VENTS
● PERCUSSION NORMALE
H CORDES : PERCUSS. SUR CAISSE DES CORDES
∵ CORDES : POINTILLISME (PIZZ, FRAPPÉ C.LEGNO ETC...)
CORDES : GLISSANDI
≡ CORDES : TENUES HARMONIQUES.

(VENTS + PERC.) SIMULTANEMENT
⋮
(VENTS + PERC. + CORDES TENUES) SIMULTAN.

CHEF Y (COLONNES)

CHEF X (LIGNES)

	1	2	3	
1	3	0	-1	(1)
2	3	-3	3	(4)
3	-5	4	-3	(3)
	(1)	(2)	(3)	

I. Xenakis 1962
ST/Venise · 101062.

SIMPLIFICATION DE LA MATRICE 19×19

Pour faciliter le travail des premieres répétitions, les chefs pourraient faire usage d'une matrice équivalente 3×3 dérivée de celle de 19×19 de la manière suivante :

Soit un morceau de matrice contenant les tactiques des lignes $r+1, \dots, r+m$ et celles des colonnes $s+1, \dots, s+n$ avec les probabilités respectives $q_{r+1}, \dots, q_{r+m}$ et $k_{s+1}, \dots, k_{s+n}$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & k_{s+1} & \cdots & k_{s+j} & \cdots & k_{s+n} \\
\hline
q_{r+1} & a_{r+1,s+1} & \cdots & a_{r+1,s+j} & \cdots & a_{r+1,s+n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
q_{r+i} & a_{r+i,s+1} & \cdots & a_{r+i,s+j} & \cdots & a_{r+i,s+n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
q_{r+m} & a_{r+m,s+1} & \cdots & a_{r+m,s+j} & \cdots & a_{r+m,s+n}
\end{array}
$$

Ce morceau peut être remplacé par le réglement unique :

$$
A_{r+m,s+n} = \frac{\sum_{i,j=1}^{i=m,\, j=n} a_{r+i,s+j} \cdot q_{r+i} \cdot K_{s+j}}{\sum_i^m q_{r+i} \cdot \sum_j^n K_{s+j}}
$$

et par les probabilités $Q = \sum_{i=1}^{m} q_{r+i}$ et $K = \sum_{j=1}^{n} k_{s+j}$. En opérant de la sorte avec la matrice 19×19 nous obtenons :

	1	2	3	
1	$\frac{7704}{25\cdot25}$	$-\frac{8296}{49\cdot25}$	$\frac{592}{25\cdot26}$	25
2	$-\frac{14522}{25\cdot45}$	$\frac{17610}{49\cdot45}$	$-\frac{3088}{45\cdot26}$	45
3	$\frac{6818}{25\cdot30}$	$-\frac{9314}{49\cdot30}$	$\frac{2496}{30\cdot26}$	30
	25	49	26	

ou bien :

	1	2	3	
1	2465	−1354	182	25
2	−2581	1597	−528	45
3	1818	−1267	640	30
	25	49	26	

CHAPITRE IV

MUSIQUE STOCHASTIQUE LIBRE, A L'ORDINATEUR

Un cas d'utilisation de l'ordinateur 7090 IBM en composition musicale.

Après cet interlude, nous retournons au traitement de la composition par les machines.

La thèse posée par Achorripsis a attendu quatre ans avant d'être réalisée mécaniquement. Cette réalisation est due à M. François Génuys de la Compagnie IBM-France, et à M. Jacques Barraud de la Société des Pétroles Shell-Berre.

MUSIQUE STOCHASTIQUE LIBRE, A L'ORDINATEUR

LE PARADOXE : MUSIQUE ET ORDINATEURS UNE MUSIQUE STOCHASTIQUE TRAITEE PAR LA 7090 IBM

La plupart des publics ont des réactions diverses devant l'alliance de la machine avec la création artistique. Elles peuvent être classées en trois catégories :

a. Il est impossible d'obtenir une *œuvre d'art*, car par définition elle est artisanale et requiert la « création » à chaque instant, dans chaque détail et dans l'ensemble, tandis qu'une machine est chose inerte, elle ne peut inventer.

b. Oui, on peut par jeu, par spéculation, chevaucher une machine mais le résultat ne sera pas « fini », il ne pourra représenter qu'une expérience, intéressante peut-être, mais sans plus.

c. Les enthousiastes qui d'emblée acceptent sans broncher toutes les merveilles d'une science-fiction forcenée. La lune? Eh bien oui, elle est à notre portée. La longévité aussi est pour demain... Pourquoi pas la machine créatrice? Ceux-ci font partie des croyants qui par idiosyncrasie optimiste ont remplacé les mythes d'Icare et des Fées devenus caduques, par la civilisation scientifique du XX^e^, qui leur donne en partie raison.

En fait, il n'y a ni paradoxe ni toute puissance animiste de la science, car elle progresse par paliers limités et imprévisibles à trop longue échéance.

Dans tous les arts il a existé ce que nous pouvons appeler le rationalisme au sens étymologique : la recherche de la proportion. L'*artiste* y a toujours fait appel, par *nécessité*. Les règles de construction ont largement varié à travers les siècles mais il y en a eu à toutes les époques. C'est la nécessité de se faire comprendre. Et ceux de la première catégorie sont les premiers à refuser la qualification d'*artistique* à un produit qu'ils ne *comprennent* point.

Ainsi la gamme est une convention qui restreint le champ des virtualités et qui permet de bâtir à l'intérieur de son enceinte, de sa symétrie particulière. Les règles de l'hymnographie chrétienne, les règles de l'harmonie, du contrepoint des diverses époques ont permis aux artistes de construire et de se faire comprendre par ceux qui adoptaient les mêmes contraintes, par tradition, par goût collectif (= mimétisme), par résonance sympathique. Les règles de la série, celles par exemple du bannissement de l'octave héritée de la tonalité, ont imposé des contraintes en partie nouvelles mais réelles.

Or tout ce qui est règle, contrainte répétée, est un morceau de machine mentale, une petite « machine imaginaire » aurait dit Philippot, un choix, un ensemble de décisions. Une œuvre musicale peut être décomposée en une multitude de machines mentales. Un thème mélodique d'une symphonie est un moule, une machine mentale, de même que sa structure. Ces machines mentales sont parfois très restrictives, très déterministes, et parfois très vagues et qui ne tranchent pas suffisamment. Ces dernières années on s'est aperçu que cette notion de mécanisme est vraiment très générale et qu'elle baigne la connaissance humaine et son action dans tous les domaines, depuis la logique stricte jusqu'aux manifestations artistiques. Et comme la roue, une des plus grandes créations de la pensée humaine est un mécanisme qui lui permet d'aller plus loin, plus vite, avec plus de bagages, ainsi en est-il des calculatrices électroniques en ce qui concerne non plus son déplacement physique mais celui de ses idées. Les ordinateurs qui résolvent des problèmes de logique posés par le *Logic Theorist*, groupe de Newell, Shaw et Simon, à l'aide de méthodes heuristiques et en dépit des théorèmes de Church, de Gödel et de Tarski, ne sont pas vraiment à l'origine de l'introduction des mathématiques en musique, mais c'est l'inverse qui s'est produit. Et si les esprits sont en général prêts à reconnaître l'utilité de l'emploi de la géométrie dans les arts plastiques (architecture, peinture,...) ils n'ont plus qu'un petit ruisseau à franchir pour qu'ils puissent concevoir l'emploi de mathématiques plus abstraites (non visuelles) et l'utilité des machines en tant qu'auxiliaires de la composition musicale plus abstraite que les arts plastiques. Ainsi pour nous résumer :

a. La pensée créatrice de l'homme secrète des mécanismes mentaux qui ne sont, en dernière analyse, que des ensembles de contraintes, de choix, et ceci dans tous les domaines y compris les arts;

b. Certains de ces mécanismes sont mathématisables;

c. Certains de ces mécanismes sont réalisables physiquement, (roue, moteurs, fusées, machines à calculer, analogiques etc.);

d. Certains mécanismes mentaux peuvent trouver des correspondances avec certains mécanismes de la nature;

e. Certains aspects mécanisables de la création artistique peuvent être simulés par certains mécanismes physiques (machines) existants ou à créer;

f. Il se trouve que les ordinateurs peuvent rendre certains services.

Voici donc le point de départ théorique d'une utilisation des calculatrices électroniques en composition musicale.

On peut de plus affirmer que :

Le rôle du compositeur actuel se trouve complété d'une part par son évolution sur un niveau plus élevé, celui de l'invention de schèmes (anciennement des formes), de l'exploration des limites de ces schèmes, et d'autre part, par celui de la synthèse scientifique des moyens nouveaux de la fabrication et de l'émission des sons qui doivent à courte échéance englober tous les anciens ou récents moyens de la lutherie instrumentale et électromagnétique à l'aide par exemple de convertisseurs analogiques déjà utilisée dans les études des communications par N. Guttman, J.R. Pierce et M.V. Mathews des Bell Telephone Laboratories de New York. Or ces explorations nécessitent un bagage mathématique, logique, physique et psychologique impressionnant et surtout des calculatrices électroniques qui accélèreraient les processus mentaux du défrichement des nouveaux domaines avec des vérifications expérimentales immédiates à toutes les étapes de la construction musicale.

La musique, de par son essence abstraite, est le premier des arts à avoir tenté la conciliation de la pensée scientifique et de la création artistique. Son industrialisation est fatale et irréversible. N'avons-nous pas déjà les tentatives d'industrialisation des musiques sérielles et légères entreprises par l'équipe parisienne : P. Barbaud, P. Blanchard, Jeanine Charbonnier, ainsi que les recherches musicologiques de L.A. Hiller et L.M. Isaacson de l'Illinois University aux U.S.A.?

Dans les chapitres précédents nous avons montré quelques domaines nouveaux de création musicale : processus poissoniens, markoviens, jeux musicaux, thèse du minimum des règles, etc. Ils sont tous basés sur les mathématiques et plus spécialement sur la théorie des probabilités. Ils sont donc très largement susceptibles d'être traités et explorés par les ordinateurs. Le schème le plus simple et particulièrement significatif, est dans la thèse du minimum des contraintes de composition défendue dans Achorripsis.

C'est grâce à mon ami M. Georges Boudouris du C.N.R.S. que j'ai fait la connaissance de M. Jacques Barraud, Ingénieur de l'Ecole des Mines, Directeur des Ensembles Electroniques de Gestion de la Société des Pétroles Shell-Berre et qui a bien accepté de m'introduire auprès de M. François Génuys, agrégé de mathématiques et chef des Etudes Scientifiques Nouvelles de IBM-France. Tous les trois sont des scientifiques et pourtant ils ont consenti à tenter une expérience à première vue farfelue, celle d'un mariage de la musique avec la machine la plus

IBM
FRANCE

La direction d'IBM France,
et Monsieur Ianis Xenakis, compositeur,
prient ______________________
de bien vouloir assister à la présentation et à l'audition d'une œuvre de musique stochastique instrumentale, qui aura lieu le 24 mai, à 18 h. 15, au siège d'IBM France, 5 place Vendôme.

R.S.V.P. — 5, place Vendôme

puissante au monde. Dans la plupart des relations humaines il est rarement question de persuasion logique pure. Il est surtout question d'intérêt matériel. Or, dans ce cas ce n'est ni la logique et encore moins l'intérêt qui ont enclenché le mariage. Il semble que la décision gratuite dans sa forme la plus pure, l'expérience pour l'expérience, le jeu pour le jeu, fut à l'origine de leur collaboration. Stochastiquement parlant ma démarche aurait dû essuyer un échec. Or les portes se sont ouvertes et au bout d'un an et demi de contacts et de travail eut lieu le 24 mai 1962 au siège d'IBM-France, 5 place Vendôme à Paris, « l'événement le plus insolite de la maison et de la saison musicale », un concert vivant dans lequel était présentée une œuvre de musique stochastique instrumentale la ST/10-1,080262, calculée par la 7090 et menée à la réussite par le chef d'orchestre C. Simonovic et son *Ensemble Instrumental de Musique Contemporaine de Paris.*

LA COMPOSITION DE L'ŒUVRE STOCHASTIQUE
ST I 10-1. 08 02 62
A ÉTÉ CALCULÉE SUR L'ORDINATEUR 7090
DE L'INSTITUT EUROPÉEN DE CALCUL SCIENTIFIQUE.

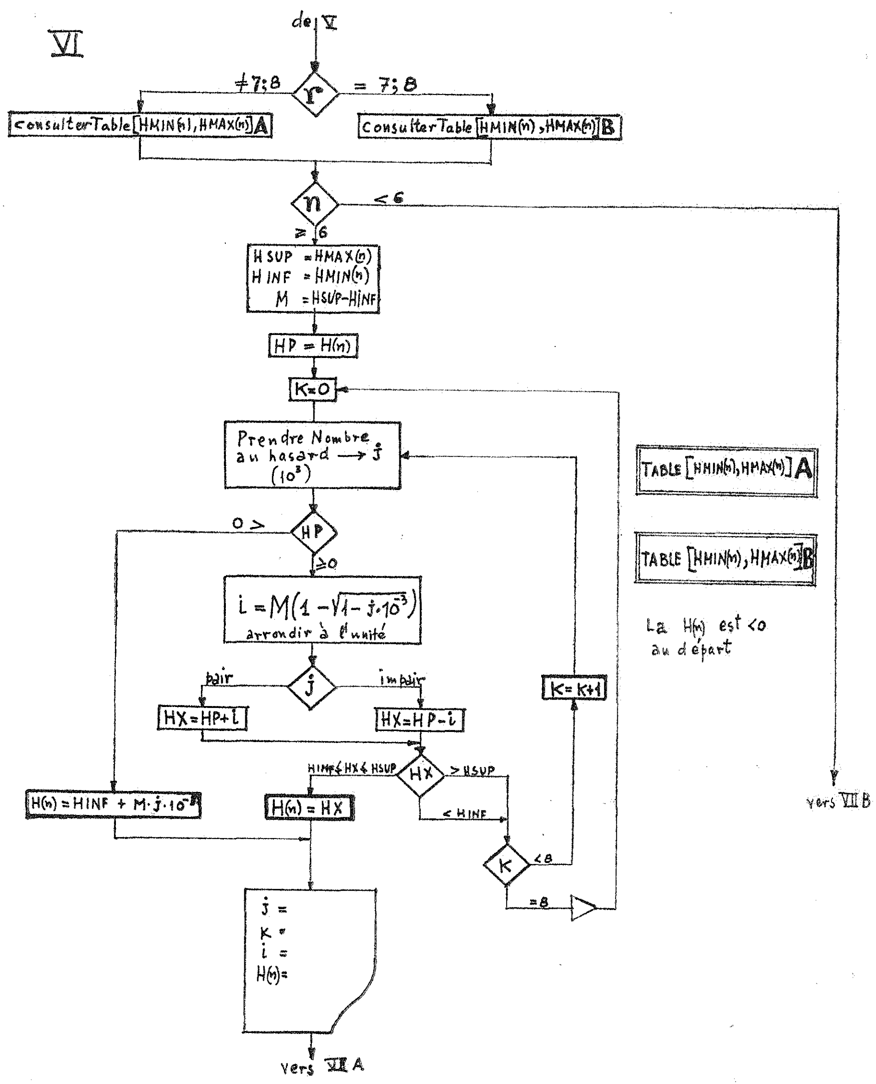
LE MORCEAU SERA EXÉCUTÉ PAR L'ENSEMBLE
INSTRUMENTAL DE MUSIQUE CONTEMPORAINE DE PARIS.
SOUS LA DIRECTION DE CONSTANTIN SIMONOVIC.
AVEC LE CONCOURS DU SERVICE DE LA RECHERCHE
DE LA R.T.F.

Cette œuvre objectivise par son passage à la machine une méthode stochastique de composition, celle du minimum de contraintes, de règles.

POSITION DU PROBLÈME.

La première phase du travail fut l'élaboration de l'organigramme, c'est-à-dire, l'écriture claire et ordonnée des étapes et des opérations du schème d'Achorripsis, en l'adaptant à la structure de la machine. Au premier chapitre nous avons exposé la méthode synthétique globale de cette structure minimale. Or la machine est un appareil à itérations qu'elle sait faire merveilleusement vite. Il fallait donc décomposer la thèse en une série séquentielle d'opérations réitérées en boucles.

Voici un extrait du premier organigramme :



L'énoncé de la thèse d'Achorripsis reçoit une première interprétation proche de la machine de la manière suivante :

I. *L'œuvre est constituée par une succession de séquences (de mouvements) de* a_i *secondes chacune.* Leurs durées sont totalement indépendantes (asymétriques) mais ont une durée moyenne fixe qui est introduite sous forme de paramètre. Ces durées et leur succession stochastique sont données par la formule :

$$P_{a_i} = ce^{-ca_i} . da \qquad \text{(voir appendice 1)}$$

II. *Définition de la densité moyenne de sons durant* a_i. Pendant une séquence sont émis des sons de diverses sources sonores. Si le nombre total de ces sons (points) durant une séquence est N_{a_i}, la densité moyenne de ce nuage de points est N_{a_i}/a_i sons (points) par seconde. En général et pour un ensemble instrumental donné, cette densité a des limites dues au nombre des instrumentistes, à la nature des instruments et à la difficulté technique. Pour un grand orchestre la limite supérieure est de l'ordre de 150 sons/sec. La limite inférieure est arbitraire. Nous avons choisi 0,11 sons/sec. D'autre part des expériences antérieures nous ont conduits à adopter une progression logarithmique de la sensation de densité avec comme base un nombre compris entre 2 et 3. Nous adoptons le nombre e = 2,71827. Ainsi les densités sont comprises entre $0{,}11.e^0$ et $0{,}11.e^6$ sons par seconde que nous figurons sur une droite graduée logarithmiquement (base e). Comme notre propos est l'indépendance totale, nous attribuons à chacune des séquences a_i calculée en (I) une densité représentée par un point tiré au hasard (équiprobabilité), de la portion de droite sus-mentionnée. Pourtant un certain souci de continuité nous amène à tempérer l'indépendance des densités entre les séquences, c'est pour cela que nous introduisons une certaine « mémoire » de séquence à séquence de la manière suivante :

soit a_{i-1} une séquence de durée a_{i-1}, $c_{a_{i-1}}$ sa densité, a_i la séquence suivante de durée a_i et c_{a_i} sa densité. La densité c_{a_i} sera donnée par la formule :

$$c_{a_i} = c_{a_{i-1}} \pm e^x . 0{,}11$$

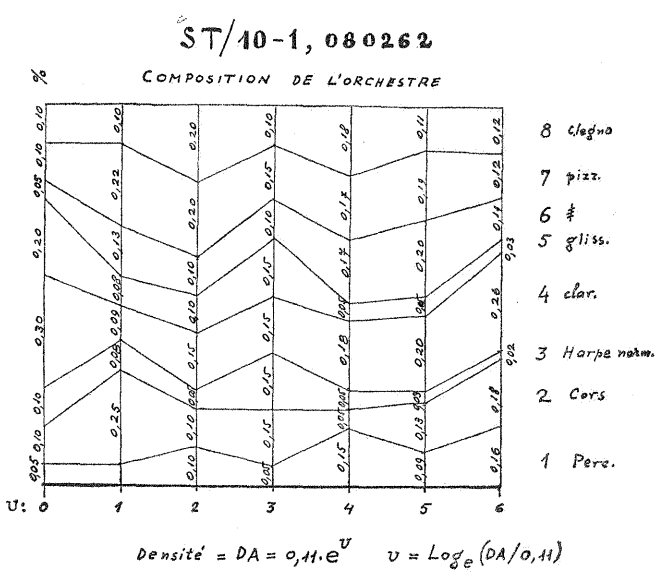
dans laquelle x est un segment de droite tiré au hasard d'un segment de droite s de longueur égale à (6 — 0). La probabilité de x est donnée par la formule :

$$P_x = \frac{2}{s}\left(1 - \frac{x}{s}\right) dx \qquad \text{(v. appendice 1)}$$

et enfin,

$$N_{a_i} = c_{a_i}.a_i$$

III. *On définit la composition de l'orchestre durant la séquence* a_i. — On divise d'abord les instruments en r classes de timbres, par exemple classe des flûtes + clarinettes, classe du hautbois + bassons, classe des cuivres, classe des crins d'archet, classe des pizzicati, classe des frappés col legno, classe des glissandi, classe des percussions bois peaux et métal, etc. La composition de l'orchestre est conçue stochastiquement c'est-à-dire que le dosage des classes n'est pas déterministe. Ainsi, durant une séquence de durée a_i il se peut qu'on ait : 80 % de la classe des pizzicati, 10 % de la classe des percussions, 7 % de la classe des claviers, 3 % de la classe des flûtes... Dans les conditions actuelles, le facteur déterminant qui conditionnerait la composition de l'orchestre est la densité. Nous lions donc la composition de l'orchestre à la densité à l'aide d'un diagramme spécial. En voici un exemple de ST/10...



Ce diagramme s'exprime par la formule suivante :

$$Q_r = (n - x).(e_{n,r} - e_{n+1,r}) + e_{n,r} ;$$

(r = numéro de la classe, $x = \dfrac{\log_e c_{a_i}}{0{,}11}$, n = 0,1,2,...,6 tel que

$n \leqslant x \leqslant n + 1$ et $e_{n,r}$ et $e_{n+1,r}$, les probabilités de la classe r en fonction de n).

Il va sans dire que la composition de ce tableau est un travail de précision très délicat et complexe.

Une fois que ces préalables sont exécutés, nous définissons l'un après l'autre les N_{a_i} sons de la séquence a_i.

IV. *Définition de la date d'occurrence du son N à l'intérieur de la séquence* a_i. — La densité moyenne des points (sons) à répartir sur a_i étant $k = N_{a_i}/a_i$, la formule qui donne les intervalles qui séparent les attaques des sons est :

$$P_t = k.e^{-kt}.dt \qquad \text{(v. appendice 1)}$$

V. *Attribuer au son précédent un instrument de l'orchestre Q déjà calculé.* — D'abord on extrait au hasard la classe r de la formation orchestrale calculée en (III), [modèle de l'urne avec des boules de r couleurs]. Ensuite, on extrait au hasard à l'intérieur de la classe r le numéro de l'instrument suivant la probabilité q_n donnée par une table arbitraire (urne avec des boules de n couleurs). Ici aussi le dosage des instruments à l'intérieur d'une classe est délicat et complexe.

VI. *Attribuer une hauteur en fonction de l'instrument.* — On se donne une origine, prise égale à zéro, correspondante au plus grave si bémol du piano, et on établit une échelle chromatique en demi-tons de 85 degrés environ. L'étendue s de chaque instrument est exprimée ainsi par un nombre naturel (distance). Mais, la hauteur h_u d'un son sera exprimée par un nombre décimal dont la partie entière se rapportera à un degré de l'échelle chromatique pris à l'intérieur de l'étendue de l'instrument.

Comme pour la densité du paragraphe (II) on accepte une certaine mémoire (dépendance) de la hauteur précédente jouée par le même instrument, de sorte que l'on a :

$$h_u = h_{u-1} \pm z$$

ou z est donné par la formule de probabilité,

$$P_z = \frac{2}{s}\left(1 - \frac{z}{s}\right) dz \qquad \text{(v. appendice 1)}$$

P_z est la probabilité de l'intervalle z extrait au hasard de l'étendue s exprimée par la différence des bornes de l'instrument.

VII. *Attribuer une vitesse de glissement si la classe r est caractérisée par le glissando.* — Les hypothèses d'homogénéité nous avaient conduits au chapitre I à la formule :

$f(v) = \frac{2}{a\sqrt{\pi}} e^{-v^2/a^2}$ et par la transformation $v/a = u$ à son homologue,

$T(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2}.d_u$ pour laquelle on consulte des tables; $f(v)$

étant la probabilité d'occurrence de la vitesse v (en demi-tons par seconde) et a un paramètre proportionnel à l'écart type s ($a = s.\sqrt{2}$).

On définit a en fonction du logarithme de la densité de la séquence a_i, par :

une fonction inversement proportionnelle,

$$a = \sqrt{\pi}\left(30 - \frac{20}{7} L(c_{a_i}/0{,}13)\right)$$

ou bien par :

une fonction directement proportionnelle,

$$a = \sqrt{\pi}\left(10 + \frac{20}{7} L(c_{a_i}/0{,}13)\right)$$

ou bien par :

une fonction indépendante de la densité,

$$a = 17{,}7 + 35.k$$

(k est un nombre aléatoire compris entre 0 et 1)

Les constantes des formules précédentes dérivent des limites des valeurs que peuvent prendre les vitesses de glissando jouées sur les instruments à archet.

Ainsi pour $c_{ai} = 145$ sons/sec $\quad a = 53{,}2$ demi-tons/sec

$2s = 75$ demi-tons/sec

Ainsi pour $c_{ai} = 0{,}13$ sons/sec $\quad a = 17{,}7$ demi-tons/sec

$2s = 25$ demi-tons/sec

VIII. *Attribuer une durée x au son émis.* — Pour simplifier, nous admettons une durée moyenne par instrument, indépendante de la tessiture et de la nuance. Par conséquent, nous nous réservons le droit de la modifier à la phase de la transcription en notation traditionnelle. Voici maintenant la liste des contraintes dont nous devons tenir compte à l'établissement de la durée x.

Contraintes :

Longueur maximum de respiration, G;

Densité de la séquence, c_{ai};

Probabilité de la classe r, p_r;

Probabilité de l'instrument n, q_n;

et la durée moyenne z d'un son est inversement proportionnelle à la probabilité d'occurrence de l'instrument, donc :

$$z = 1/c_{ai}.p_r.q_n.$$

et z sera maximum pour $(c_{ai}.p_r.q_n)$ minimum et dans ce cas nous aurions pu choisir $z_{max.} = G$.

Au lieu de prendre $z_{max.} = G$, nous fixerons une loi logarithmique de manière à geler la croissance de z. Cette loi est pour $(c_{a_i}.p_r.q_n)$ quelconque,

$z' = z.a^{-z}$ dans laquelle a est tiré de $z_{max}\, a^{-z\,max} = G$.

Puisque nous admettons une indépendance totale, la forme de répartition des durées x sera gaussienne,

$f(x) = \dfrac{1}{s\sqrt{2\pi}}\, e^{-(x-m)^2/2s^2}$ m étant la moyenne arithmétique des durées, s l'écart-type, et $\begin{matrix} m - 2s = 0 \\ m + 2s = z' \end{matrix}$, le système linéaire qui nous fournira les constantes m et s. En posant $u = (x\text{-}m)/s\sqrt{2}$ nous retrouvons la fonction T(u), pour laquelle on consulte des tables.

Enfin, la durée x du son sera donnée par la relation :

$$x = u.s.\sqrt{2} + m$$

Nous ne tenons pas compte des incompatibilités entre instruments, car ceci alourdirait inutilement le programme et le calcul de la machine.

IX. *Attribuer une forme dynamique au son émis.* — Nous admettons quatre zones d'intensités moyennes :

ppp, p, f, ff.

Nous réalisons des combinaisons permutées de ces quatre éléments trois à trois avec répétition. Il vient,

$4^3 = 64$ combinaisons dont 44 distinctes; (modèle de l'urne avec 44 couleurs). Exemple, ppp < f > p.

X. On recommence les mêmes opérations pour chacun des sons du nuage N_{a_i}.

XI. On recalcule de la même façon d'autres séquences.

Nous avons terminé avec l'énoncé séquentiel dont un extrait a été reproduit. Maintenant il faut procéder à la transcription en langage Fortran que la machine « comprend ».

```
      PRCGRAMME XENAKIS  STOCHASTIC MUSIC                    9/01/62     PAGE 1
C                                                            XEN  1
C     READ CONSTANTS AND TABLES                              XEN  1
      DIMENSION Q(12),S(12),E(12,12),PN(12,50),SPN(12,50),NT(12), XEN  1
     1HAMIN(12,50),HAMAX(12,50),HBMIN(12,50),HBMAX(12,50),GN(12,50),H(12
     2,50),TETA(256),VIGL(3),MODI(7),Z1(8),Z2(8),ALFA(3),AMAX(12)
C                                                            XEN  1
      I=1
      DO 36 IX=1,7
      IX8=8-IX
      MODI(IX8)=I
      I=I+I
   36 CONTINUL
C                                                            XEN  1
      READ INPUT TAPE 5,114,(TETA(I),I=1,256)
      READ INPUT TAPE 5,113,(Z1(I),Z2(I),I=1,8)
C                                                            XEN  1
 3000 READ INPUT TAPE 5,110,DELTA,V3,A10,A20,A17,A30,A35,BF,SQPI,EPSI,VI
     1TLIM,ALEA,ALIM
      READ INPUT TAPE 5,109,KT1,KT2,KW KNL,KTR,KTE,KR1,GTNA,GTNS,(NT(I),
     1I=1,KTR)
      READ INPUT TAPE 5,115,KTEST3,KTEST1,KTEST2
C                                                            XEN  1
      IF(KTEST3)2000,2001,2000
 2000 PRINT 118
 2001 R=KTE-1
      A10=A10*SQPI
      A20=A20*SQPI/R
      A30=A30*SQPI
      DO 92 I=1,KTR                                          XEN  1
      Y=0.
      KTS=NT(I)                                              XEN  1
      READ INPUT TAPE 5,112,(HAMIN(I,J),HAMAX(I,J),HBMIN(I,J),HBMAX(I,J)
     1,GN(I,J),PN(I,J),J=1,KTS)
      DO 95 J=1,KTS
      Y=Y+PN(I,J)
      SPN(I,J)=Y
   95 CONTINUE
      IF(ABSF(Y-1.)-EPSI)92,9,9
 92   CONTINUE                                               XEN  1
C                                                            XEN  1
      DO 90 I=1,KTR                                          XEN  1
      READ INPUT TAPE 5,111,(E(I,J),J=1,KTE)
 90   CONTINUE
      DO 88 J=1,KTE
      Y=0.
      DO 83 I=1,KTR
      Y=Y+E(I,J)
   83 CONTINUE
      IF(ABSF(Y-1.)-EPSI)88,9,9
   88 CONTINUE
      DO 30 I=1,KTR
      AMAX(I)=1./E(I,1)
      DO 30 J=2,KTE
      AJ=J-1
      AX=1./(E(I,J)*EXPF(AJ))
```

Il n'est pas de notre propos de décrire la transformation en Fortran de l'organigramme. Il serait pourtant intéressant de montrer par un exemple l'adaptation d'une expression mathématique aux façons de faire de la machine.

Considérons la loi de probabilité élémentaire :

$$f(x).dx = c.e^{-cx}.dx \quad [20]$$

comment allons-nous faire pour que l'ordinateur nous donne des longueurs x avec la probabilité f(x).dx ?

La machine ne peut que tirer des nombres y au hasard, compris entre 0 et 1, avec équiprobabilité. Or, voici comment nous allons « moduler » cette équiprobabilité :

Soit une longueur quelconque x_0; on a :

$$\text{probab.}\ (0 \leqslant x \leqslant x_0) = \int_0^{x_0} f(x).dx = 1 - e^{-cx_0} = F(x_0),$$

$F(x_0)$ est la fonction de répartition des x. Mais,

$$F(x_0) = \text{probab.}\ (0 \leqslant y \leqslant y_0) = y_0$$

$$\text{donc } 1 - e^{-cx_0} = y_0 \qquad \text{et} \qquad x_0 = -\frac{Lg(1 - y_0)}{c} \text{ pour tout } x_0 \geqslant o.$$

Une fois le programme transcrit en langage assimilable par l'organisation interne de la machine (cela nous a pris plusieurs mois), on procède à la perforation des cartes et ensuite à une série de tests, c'est-à-dire à des courts passages en machine pour détecter les erreurs de logique, d'orthographe et pour fixer les valeurs des paramètres d'entrée qui sont introduitts sous forme de variables. C'est une phase très importante qui permet d'explorer toutes les zones du programme et de définir les modalités de son exploitation.

La phase finale est le décodage des résultats en notation traditionnelle, à moins de disposer d'un transcripteur automatique.

Résultats provisoires d'une phase de l'analyse.

JW= 1 A= 7.71 NA= 67 Q(I)=0.09/0.15/0.16/0.16/0.15/0.02/0.08/0.13/0.06/

N	TA	CLAS	INST	H	VIGL1	VIGL2	VIGL3	DUREE	DYNAM
1	0.	8	10	33.0	0.	0.	0.	0.	22
2	0.07	6	41	25.9	0.	0.	0.	13.94	54
3	0.09	9	1	60.7	0.	0.	0.	3.98	15
4	0.14	3	4	20.6	0.	0.	0.	0.89	1
5	0.24	3	2	50.1	0.	0.	0.	1.20	36
6	0.28	7	28	48.7	0.	0.	0.	0.	54
7	0.33	7	25	47.2	0.	0.	0.	0.	9
8	0.40	8	40	33.0	0.	0.	0.	0.	11
9	0.54	5	34	26.4	-8.0	-10.0	-6.0	4.72	53
10	0.68	8	38	24.1	0.	0.	0.	0.	54
11	0.72	2	5	42.0	0.	0.	0.	1.39	22
12	0.83	4	3	43.4	0.	0.	0.	1.60	15
13	0.85	2	4	58.3	0.	0.	0.	1.59	56
14	0.98	4	3	34.0	0.	0.	0.	1.76	55
15	1.23	4	2	42.0	0.	0.	0.	0.74	44
16	1.26	2	6	43.4	0.	0.	0.	2.12	15
17	1.28	3	2	61.9	0.	0.	0.	1.70	2
18	1.30	2	3	55.7	0.	0.	0.	0.29	38
19	1.34	2	3	58.1	0.	0.	0.	2.97	13
20	1.35	8	5	64.4	0.	0.	0.	0.	31
21	1.37	3	2	41.4	0.	0.	0.	0.	22
22	1.52	4	2	49.8	0.	0.	0.	0.02	53
23	1.59	5	32	46.7	-13.0	14.0	-11.0	4.10	25
24	1.63	7	28	44.7	0.	0.	0.	0.	7
25	1.68	6	38	41.5	0.	0.	0.	13.68	41
26	1.73	4	4	40.9	0.	0.	0.	0.66	13
27	1.73	2	6	18.4	0.	0.	0.	0.64	32
28	1.83	8	33	28.6	0.	0.	0.	0.	46
29	1.86	3	1	61.1	0.	0.	0.	0.79	14
30	1.95	2	3	40.1	0.	0.	0.	2.34	48
31	2.07	3	2	41.2	0.	0.	0.	1.21	9
32	2.19	1	4	0.	0.	0.	0.	8.63	56
33	2.33	5	16	47.8	-38.0	-24.0	-31.0	4.20	19
34	2.56	9	1	63.9	0.	0.	0.	1.84	54
35	2.61	5	22	67.6	-37.0	-50.0	31.0	12.97	41
36	2.67	8	46	23.4	0.	0.	0.	0.	33
37	2.75	4	1	67.9	0.	0.	0.	1.52	51
38	2.78	9	2	70.3	0.	0.	0.	6.06	6
39	2.92	4	4	25.1	0.	0.	0.	0.48	52
40	2.93	4	2	73.1	0.	0.	0.	1.02	25
41	2.98	7	42	25.9	0.	0.	0.	0.	43
42	3.08	4	2	54.7	0.	0.	0.	0.95	38
43	3.15	5	45	24.3	32.0	-20.0	26.0	5.78	60
44	3.17	5	43	38.4	21.0	-20.0	17.0	9.33	33
45	3.22	4	2	67.2	0.	0.	0.	0.34	60
46	3.22	8	41	33.6	0.	0.	0.	0.	5
47	3.25	7	2	59.9	0.	0.	0.	0.	43
48	3.34	9	1	57.0	0.	0.	0.	2.50	47
49	3.62	1	7	0.	0.	0.	0.	17.06	10
50	3.67	8	13	54.3	0.	0.	0.	0.	41

Extrait de la partition de ST/10-1,080262.

Conclusions. — Une infinité de compositions du genre de ST/10-1,080262 est possible, pour une infinité de formations d'orchestre. Déjà une deuxième a été établie pour grand orchestre, commandée par la RTF (France III) et intitulée ST/48-1,240162; Atrées pour 10 solistes, Morsima-Amorsima pour 4 solistes, etc...

Quoique ce programme donne une solution assez satisfaisante du schème de la structure minimale, il serait pourtant nécessaire de franchir l'étape de la composition pure, en couplant à la machine digitale un convertisseur analogique des calculs numériques en sons dont toute l'organisation interne serait conçue à l'avance. A ce moment on pourrait faire fructifier et généraliser les conceptions décrites aux chapitres précédents.

Voici enfin quelques avantages de l'utilisation des cerveaux électroniques en composition musicale.

a). Le calcul long et laborieux fait à la main est réduit à néant. Les vitesses de calcul des machines, par exemple de la 7090 IBM, qui contrôle en ce moment la fusée vénusienne des U.S.A., sont très grandes, de l'ordre de 500 000 opérations élémentaires à la seconde. D'où économie de temps !

b). Le compositeur ainsi libéré des calculs fastidieux peut davantage se consacrer aux problèmes généraux que pose la nouvelle forme musicale et explorer les plis et les recoins de cette forme en modifiant les valeurs des données initiales. Par exemple, il peut tester toutes les combinaisons instrumentales allant des instruments solistes, en passant par les orchestres de chambre, jusqu'aux grands orchestres. Le compositeur devient à l'aide des cerveaux électroniques une sorte de pilote appuyant des boutons, introduisant des coordonnées et surveillant les cadrans d'un vaisseau cosmique naviguant dans l'espace des sons à travers des constellations et des galaxies sonores que seulement par le rêve lointain il pouvait entrevoir jadis.

Maintenant il peut les explorer à son aise assis dans un fauteuil.

c). Le programme, c'est-à-dire la liste des opérations séquentielles qui constituent la forme musicale nouvelle, est une objectivation de cette forme. Le programme peut, par conséquent, être expédié à n'importe quel point de la terre qui possède des cerveaux de type semblable et être exploité par n'importe quel compositeur pilote.

d). Du fait de certaines incertitudes introduites dans le programme, un compositeur pilote peut imprimer sa propre personnalité dans le résultat sonore qu'il obtiendra.

CHAPITRE V

MUSIQUE SYMBOLIQUE

Ici nous allons aborder le problème épineux de la Logique sous-jacente à la composition musicale ; la Logique, cette reine de la connaissance, qui, accaparée par la mathématique, hésite entre son propre nom bimillénaire et celui d'Algèbre.

Nous aurions aimé faire la synthèse logique des chapitres précédents. Laissons-la à l'état latent pour l'instant. Nous nous bornerons à tracer une sente qui aura peut-être le privilège de nous conduire vers des régions plus harmonieuses, dans un futur pas trop lointain.

MUSIQUE SYMBOLIQUE

Une esquisse logique et algébrique de la composition musicale

Dans ce chapitre nous commencerons par nous considérer brusquement amnésiques de manière à pouvoir remonter aux sources des opérations mentales de la composition et pour essayer de dégager des principes généraux valables pour toutes les musiques. Nous n'allons pas faire une étude psychophysiologique de la perception, mais plus simplement essayer de voir un peu plus clair dans le phénomène de l'écoute et de la pensée lorsque nous entendons de la musique, de manière à forger un outil de meilleure compréhension des œuvres du passé et de fabrication de musiques futures. Nous serons donc obligés de ramasser, tailler, souder des êtres et des conceptions que nous rencontrerons épars ou organisés, en déroulant le fil ténu d'une logique qui certainement présentera des lacunes, mais qui aura le mérite d'exister.

Cas d'un seul élément générique.

Soit un événement sonore non éternel. On le perçoit globalement comme une entité et cette perception globale nous est suffisante pour l'instant. Nous admettons, en raison de l'amnésie, qu'il est neutre; ni plaisant ni déplaisant.

Postulat. — Nous nous refuserons systématiquement un jugement de qualité sur tout événement sonore; ce qui comptera, seront les relations abstraites à l'intérieur de l'événement ou entre plusieurs événements et les opérations logiques que l'on pourra leur infliger. A ce titre, son émission est une sorte d'énoncé, d'écriture, une sorte de symbole sonore que l'on peut, à son tour, noter graphiquement par une lettre, $\underline{a}$.

S'il est émis une fois, ceci ne signifie pas autre chose qu'une existence unique apparue et disparue : nous avons $\underline{a}$.

S'il est émis plusieurs fois de suite, on compare les événements et l'on conclut qu'ils sont *identiques,* c'est tout. L'identité, la tautologie est donc impliquée par une répétition. Mais simultanément un autre phénomène sous-jacent est créé en raison de cette répétition même, c'est la *modulation du temps.* Si cet événement était un son de Morse, les abscisses temporelles prendraient un sens externe au son et indépendant de lui. Donc, en plus de la déduction de la tautologie, la répétition fait apparaître un phénomène nouveau inscrit dans le temps et qui le module.

En résumé : si on ne tient pas compte de l'élément temporel, alors, un événement sonore unique ne signifie que son énoncé; le signe, le symbole, l'élément générique $\underline{a}$, a été énoncé;

un événement sonore répété réellement (ou mentalement) ne signifie qu'une identité, une tautologie idempotente :

$$\underline{a}V\underline{a}V\underline{a}V\underline{a}V...V\underline{a} = \underline{a}$$

V étant un opérateur qui veut dire : mettre côte à côte intemporellement, avec; le signe =, que c'est la même chose.

C'est tout ce qu'on peut faire avec un événement sonore.

Cas de deux éléments génériques et plus.

Soit deux événements sonores $\underline{a}$ et $\underline{b}$, tels que $\underline{a}$ ne soit pas identique à $\underline{b}$, et que les deux soient distincts et immédiatement reconnaissables, comme le sont, par exemple, les lettres a et b qui ne sont confondues que lorsqu'elles sont mal écrites ou lorsque notre vue est basse.

Si on ne tient pas compte de l'élément temporel, alors c'est que l'on considère un couple d'éléments en soi. Par conséquent émettre d'abord $\underline{a}$ puis $\underline{b}$, ou d'abord $\underline{b}$ puis $\underline{a}$ ne nous renseigne pas plus sur ces événements distincts que lorsqu'on les a entendus isolément après de longs intervalles de silence; et puisqu'on ne tient pas compte ni des relations de similitude, ni du facteur temps, on peut écrire pour $\underline{a} \neq \underline{b}$:

$$\underline{a}V\underline{b} = \underline{b}V\underline{a}$$

c'est-à-dire que $\underline{a}$ et $\underline{b}$ côte à côte ne créent pas une chose nouvelle, V ayant la même signification que précédemment. Il existe donc une loi commutative.

Dans le cas de trois événements distingués, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, on peut considérer une combinaison deux par deux de ces symboles sonores, comme formant un autre élément, une entité par rapport au troisième :

$$(\underline{a}V\underline{b})V\underline{c}$$

mais cette opération d'association n'apportant rien de plus, on peut écrire,

$$(\underline{a}V\underline{b})V\underline{c} = \underline{a}V(\underline{b}V\underline{c}) \qquad \text{loi associative.}$$

L'exclusion du facteur temps, conduit donc à deux règles de composition hors-temps, la commutativité et l'associativité. (Ces deux règles de composition hors-temps sont extensibles au cas d'un seul événement.)

Par contre, lorsque les manifestations des éléments génériques $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, sont considérées dans le temps on ne peut plus admettre la commutativité. Ainsi :

$$\underline{a}T\underline{b} \neq \underline{b}T\underline{a}$$

(T est le symbole de la loi de composition qui veut dire antérieur à...)

Cette dissymétrie est le résultat de notre expérience millénaire, de notre habitude de correspondance biunivoque entre événements et intervalles de temps. Elle est levée lorsque nous considérons le temps en soi sans les événements, ce qui nous conduit au temps métrique qui admet *et* la commutativité *et* l'associativité :

$$\underline{a}T\underline{b} = \underline{b}T\underline{a} \qquad \text{loi commutative;}$$

$$(\underline{a}T\underline{b})T\underline{c} = \underline{a}T(\underline{b}T\underline{c}) \qquad \text{loi associative.}$$

Notion de distance (intervalle).

La considération d'éléments génériques, $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$,... en bloc, ne nous permet pas d'avancer beaucoup. Pour exploiter et pour éclaircir ce qui vient d'être dit, il est nécessaire de pénétrer dans l'organisation interne des symboles sonores.

Tout événement sonore est perçu comme une collection de qualités qui se modifient durant sa vie. Sur un premier plan on perçoit la hauteur, l'intensité, la durée, le timbre, l'attaque, la rugosité, etc. Sur un autre plan on peut distinguer des complexités, des degrés d'ordre, des variabilités, des densités, des homogénéités, des fluctuations, des épaisseurs, etc... Notre étude n'essayera pas d'élucider ces questions difficiles, d'une part, et secondaires, de l'autre. Elles sont secondaires car toute grandeur qualitative peut être graduée même grossièrement et ordonnée totalement. Nous allons donc choisir une qualité et ce qui sera dit sur elle pourra être étendu aux autres. Considérons donc une série d'événements discernables uniquement par la hauteur, telle qu'elle est perçue par un observateur ayant perdu sa mémoire. Deux éléments $\underline{a}$, $\underline{b}$ ne lui suffisent pas pour créer la notion de distance, d'intervalle. Il faut attendre un troisième terme $\underline{c}$ pour que l'observateur, à travers ses sensations immédiates, puisse, par comparaisons successives, former d'abord la notion de grandeur relative, $\underline{b}$ entre $\underline{a}$ et $\underline{c}$, qui est une première expression du rangement, et ensuite former la notion de distance, d'intervalle. Ce travail mental aboutira au classement dans un ordre total non seulement des hauteurs, mais aussi des intervalles mélodiques; car étant donné l'ensemble des hauteurs,

$$H = (h_a, h_b, h_c, \ldots),$$

et la relation binaire S (plus grand que, ou égal à), on a bien,

1° pour tout $h \varepsilon H$, hSh : réflexivité;

2° $h_aSh_b \neq h_bSh_a$ sauf pour $h_a = h_b$, donc antisymétrie;

3° h_aSh_b et h_bSh_c entraînent h_aSh_c, donc transitivité.

Ainsi, les divers aspects des sensations que produisent des événements sonores peuvent, à la longue, constituer des ensembles totalement ou partiellement ordonnés suivant l'intervalle unitaire adopté. Par exemple, si on adoptait comme intervalle unitaire de hauteur non pas le demi-ton ($\triangleq$ 1,059), mais un rapport de 1,00001 alors, le seuil de *définition* de l'oreille humaine étant inférieur à ce rapport, les ensembles des hauteurs et des intervalles auront de gros flous et ne seront pas totalement ordonnés. En général, pour une distance unitaire assez grande, toutes les qualités des événements sonores peuvent être ordonnées totalement.

En conformité avec l'expérience de l'acoustique, nous supposerons que les ultimes aspects des événements sonores sont la fréquence (sentie comme hauteur), l'intensité et la durée, et que tout événement sonore peut être construit à partir de ces trois facteurs dûment engencés. Ce nombre de trois est irréductible.

STRUCTURE DES QUALITÉS DES ÉVÉNEMENTS SONORES *

Ayant défini la notion d'intervalle (distance), nous examinerons des ensembles d'intervalles.

Soit maintenant l'ensemble H des intervalles de hauteur (mélodiques) :

1° Il existe une loi de composition interne telle que, à tout couple h_a, $h_b \in H$ on peut faire correspondre un troisième élément, le composé de h_a par h_b, que nous noterons $h_a + h_b = h_c$, tel que $h_c \in H$. Exemple : soit trois sons caractérisés par les hauteurs I, II, III, et $h_{(\mathrm{I},\ \mathrm{II})}$, $h_{(\mathrm{II},\ \mathrm{III})}$, les intervalles en demi-tons séparant les couples (I, II) et (II, III) respectivement. L'intervalle $h_{(\mathrm{I},\ \mathrm{III})}$, séparant les sons I et III sera égal à la somme des demi-tons des deux autres. On peut donc admettre que la loi de composition interne est l'*addition*.

2° La loi est associative :

$h_a + (h_b + h_c) = (h_a + h_b) + h_c = h_a + h_b + h_c$.

3° Il existe un élément neutre, h_o, tel que, pour tout $h_a \in H$,

$$h_o + h_a = h_a + h_o = h_a$$

Exemples : pour la hauteur l'élément neutre a un nom, c'est l'unisson, l'intervalle nul; pour l'intensité c'est l'intervalle nul et il n'a pas de nom; pour la durée c'est la durée nulle, la simultanéité.

4° Pour tout h_a il existe un élément spécial h'_a dit inverse tel que:

$$h'_a + h_a = h_a + h'_a = h_o = 0$$

Exemples : à un intervalle mélodique ascendant h_a on peut faire correspondre un intervalle descendant h'_a qui ramène à l'unisson; à un intervalle d'intensité augmentant (exprimé en décibels positifs) on peut trouver un autre diminuant (en db négatifs), tel que la combinaison des deux annule leurs effets; à un intervalle de temps positif on peut faire correspondre une durée négative telle que la somme des deux soit nulle.

(*) On peut à l'exemple de Peano poser une axiomatique des hauteurs et construire la gamme chromatique, la gamme par tons, etc... à l'aide de trois termes premiers : origine, une note, le successeur de — et cinq propositions premières :

1. L'origine est une note ;
2. Le successeur d'une note est une note ;
3. Plusieurs notes quelconques ne peuvent avoir le même successeur ;
4. L'origine n'est le successeur d'aucune note ;
5. Si une propriété appartient à l'origine et si, lorsqu'elle appartient à une note quelconque, elle appartient aussi à son successeur, alors elle appartient à toutes les notes (principe d'induction).

5° Il existe l'égalité :

$$h_a + h_b = h_b + h_a \qquad \text{(commutativité)}$$

Les cinq axiomes précédents ont été établis hors-temps et pour la hauteur. Mais les exemples, les ont étendus aux deux autres facteurs fondamentaux de l'événement sonore de sorte qu'on peut admettre que les ensembles : H (intervalles de hauteur), G (intervalles d'intensité), U (durées), sont munis d'une *structure de groupe additif abélien.*

Pour bien préciser la différence et la parenté qui existent entre l'ensemble temporel T et les autres ensembles considérés hors-temps, et pour ne pas confondre par exemple, l'ensemble U (durées) qui caractérise un événement sonore, avec les intervalles de temps qui séparent chronologiquement les événements sonores et qui appartiennent à l'ensemble T, nous allons résumer les étapes successives de notre compréhension.

Résumé.

Soit trois événements $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$, émis successivement;

Première étape : on distingue trois événements et c'est tout.

Deuxième étape : on distingue une « succession temporelle » c'est-à-dire une correspondance entre événements et instants. Il en résulte :

$\underline{a}$ avant $\underline{b}$ $\neq$ $\underline{b}$ avant $\underline{a}$ (non commutativité).

Troisième étape : on distingue trois événements sonores qui divisent le temps en deux tronçons intérieurs aux événements. Ces deux tronçons peuvent être comparés et ensuite exprimés en multiples d'une unité. Le temps devient métrique, les tronçons constituent les éléments génériques de l'ensemble T en jouissant de la commutativité.

D'après J. Piaget, la notion de temps chez l'enfant traverse ces trois phases.

Quatrième étape : on distingue trois événements sonores, on distingue les intervalles de temps, on admet l'indépendance entre les événements sonores et les intervalles de temps, on admet une *algèbre hors-temps* des événements sonores, une deuxième *algèbre temporelle* pour les intervalles temporels les deux algèbres étant d'ailleurs identiques. (Il est inutile de refaire les raisonnements pour montrer que les intervalles temporels entre des événements constituent un ensemble T muni d'une structure de groupe additif abélien). On admet enfin des correspondances biunivoques entre des fonctions algébriques hors-temps et des fonctions algébriques temporelles. Elles peuvent constituer une *algèbre en-temps.*

En conclusion, toute analyse musicale et toute construction musicale doivent se baser sur :

a. L'étude d'une entité (l'événement sonore), qui groupe en dernière analyse trois aspects (la hauteur, l'intensité, la durée) et qui possède une *structure hors-temps;*

b. L'étude de l'autre entité plus simple, le temps qui possède une *structure temporelle;*

c. La correspondance entre la structure hors-temps et la structure temporelle, la structure *en-temps.*

ESPACE VECTORIEL.

Puisque les ensembles, H (des intervalles mélodiques), G (des intervalles d'intensité), U (des intervalles de temps), T (des intervalles de temps séparant les événements sonores et indépendants d'eux), sont totalement ordonnés, on peut établir une loi de composition externe de chacun d'eux avec l'ensemble R des nombres réels, telle que : pour tout élément $\underline{a} \in E$ (E est un des ensembles précités) et pour tout élément $A \in R$, il existe un élément $\underline{b} = A\underline{a}$ tel que $\underline{b} \in E$. Autrement dit les ensembles E sont isomorphes à l'ensemble R des réels.

Nous pouvons maintenant raisonner non plus sur les ensembles précédents mais sur l'ensemble R.

Soit $\overline{X}$ une suite de trois nombres x_1, x_2, x_3, correspondant respectivement aux éléments des ensembles H, G, U, et rangés dans un certain ordre : $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$. Cette suite est un vecteur et x_1, x_2, x_3, sont ses *composantes.* En particulier le vecteur dont toutes les composantes sont nulles est un vecteur nul, $\overline{0}$ ou o. Ce vecteur est aussi appelé origine des coordonnées, et par analogie avec la géométrie élémentaire, le vecteur admettant les nombres (x_1, x_2, x_3) pour composantes sera appelé point M de coordonnées (x_1, x_2, x_3). Deux points (ou deux vecteurs) sont dits égaux s'ils sont définis par la même suite : $x_i = y_i$.

L'ensemble de ces suites constitue un espace vectoriel à 3 dimensions, E_3.

Il existe deux lois de composition relativement à E_3.

1° Une loi de composition interne, l'addition;

Si $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$ et $\overline{Y} = (y_1, y_2, y_3)$,

alors $\overline{X} + \overline{Y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$.

On vérifie les propriétés suivantes :

a. $\overline{X} + \overline{Y} = \overline{Y} + \overline{X}$ (commutativité);

b. $\overline{X} + (\overline{Y} + \overline{Z}) = (\overline{X} + \overline{Y}) + \overline{Z}$ (associativité);

c. Etant donné deux vecteurs $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, il existe un vecteur unique $Z = (z_1, z_2, z_3)$ tel que : $\overline{X} = \overline{Y} + \overline{Z}$.

On a : $z_i = x_i - y_i$; $\overline{Z}$ est appelé différence de $\overline{X}$ et de $\overline{Y}$ et se note $\overline{Z} = \overline{X} - \overline{Y}$. En particulier, $\overline{X} + o = o + \overline{X} = \overline{X}$ et à chaque vecteur $\overline{X}$ on peut associer le vecteur opposé $(-\overline{X})$ de composantes $(-x_1, -x_2, -x_3)$, tel que : $\overline{X} + (-\overline{X}) = o$.

2° Une loi de composition externe, la multiplication par un nombre : si $p \varepsilon R$ et $\overline{X} \varepsilon E_3$, alors $p\overline{X} = (px_1, px_2, px_3)\ \varepsilon E_3$.

On vérifie les propriétés suivantes pour $(p,q)\ \varepsilon R$.

a. $1.\overline{X} = \overline{X}$;

b. $p(q\overline{X}) = (pq)\overline{X}$ (associativité);

c. $\left.\begin{array}{l}(p + q)\overline{X} = p\overline{X} + q\overline{X} \\ p(\overline{X} + \overline{Y}) = p\overline{X} + p\overline{Y}\end{array}\right\}$ (distributivité)

Base ou repère de l'espace vectoriel.

S'il est impossible de trouver un système de p nombres $a_1, a_2, a_3, ..., a_p$, non tous nuls tels que :

$a_1\overline{X}_1 + a_2\overline{X}_2 + ... + a_p\overline{X}_p = o$, à la condition que les p vecteurs $\overline{X}_1, \overline{X}_2, ..., \overline{X}_p$ de l'espace E_3 soient non nuls, alors nous dirons que ces vecteurs sont *linéairement indépendants*.

Soit un vecteur de E_3 dont la i-ième composante est 1, les autres 0. Ce vecteur $\overline{e}$ est le i-ième *vecteur unitaire* de E_3. Il existe donc 3 vecteurs unitaires de E_3, par exemple les $\overline{h}$, $\overline{g}$, $\overline{u}$, correspondant aux ensembles H, G, U, respectivement, et ces trois vecteurs sont linéairement indépendants, car la relation :

$$a_1\overline{h} + a_2\overline{g} + a_3\overline{u} = o$$

entraîne : $a_1 = a_2 = a_3 = o$.

De plus, tout vecteur $\overline{X} = (x_1, x_2, x_3)$ de E_3 peut s'écrire :

$$\overline{X} = x_1\overline{h} + x_2\overline{g} + x_3\overline{u}.$$

Il en résulte immédiatement qu'il ne peut exister dans E_3 plus de 3 vecteurs linéairement indépendants. L'ensemble $\overline{h}$, $\overline{g}$, $\overline{u}$ constitue une *base* de E_3. Par analogie avec la géométrie élémentaire, nous dirons que $\overline{Oh}$, $\overline{Og}$, $\overline{Ou}$, sont des axes de coordonnées, et que leur ensemble constitue un *repère* de E_3. Dans un tel espace, tous les repères ont la même origine 0.

Multiplicité linéaire vectorielle. — On dit qu'un ensemble non vide V de vecteurs de E_3 constitue une *multiplicité linéaire vectorielle* s'il possède les propriétés suivantes :

1° Si $\overline{X}$ est un vecteur de V, tout vecteur $p\overline{X}$ appartient aussi à V quel que soit le scalaire p;

2° Si $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont deux vecteurs de V, $\overline{X} + \overline{Y}$ appartient aussi à V. On en déduit que :

a. Toute multiplicité linéaire vectorielle contient le vecteur $\overline{O}$, $(o.\overline{X} = o)$;

b. Toute combinaison linéaire $a_1\overline{X}_1 + a_2\overline{X}_2 + ... + a_p\overline{X}_p$, de p vecteurs de V est un vecteur de V.

Remarques :

I. Tout événement sonore peut s'exprimer par une multiplicité vectorielle.

II. Il n'existe qu'une seule base, la $\overline{h}$, $\overline{g}$, $\overline{u}$. Toute autre qualité des sons, toute autre composante plus complexe, peut se ramener à une combinaison linéaire de ces trois vecteurs unitaires. La dimension de V est donc 3.

III. Les scalaires p,q ne peuvent prendre en pratique toutes les valeurs car on sortirait du domaine de l'aire audible. Mais cette restriction d'ordre pratique n'infirme pas la généralité de ces raisonnements et leurs applications.

Exemples. — Soit 0 l'origine d'un trièdre de référence avec pour repère $\overline{Oh}$, $\overline{Og}$, $\overline{Ou}$, et une base $\overline{h}$, $\overline{g}$, $\overline{u}$, avec les unités suivantes :

pour $\overline{h}$, 1 = demi-ton;
pour $\overline{g}$, 1 = 10 décibels;
pour $\overline{u}$, 1 = seconde;

l'origine O sera choisie arbitrairement sur les échelles « absolues » données par la tradition (à la manière du zéro du thermomètre). Ainsi pour :

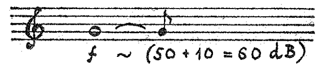
$\overline{h}$, l'O sera sur le do_3 (la_3 = 440 Hz/sec.);
$\overline{g}$, l'O sera sur les 50 db,
$\overline{u}$, l'O sera sur les 10 sec.,

et les vecteurs,

$$\overline{X}_1 = 5\overline{h} - 3\overline{g} + 5\overline{u}$$
$$\overline{X}_2 = 7\overline{h} + 1\overline{g} - 1\overline{u}$$

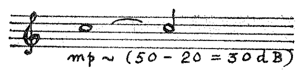
peuvent être écrits en notation traditionnelle pour 1 sec. $\hat{=}$ ♪ :

$\overline{X}_1 =$ 

$\overline{X}_2 =$ 

De même :

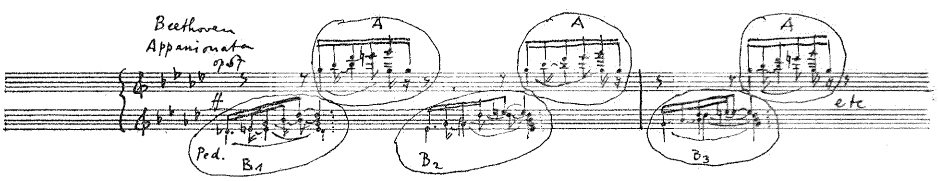
$$\overline{X}_1 + \overline{X}_2 = (5 + 7)\,\overline{h} + (1 - 3)\,\overline{g} + (5 - 1)\,\overline{u} = 12\,\overline{h} - 2\,\overline{g} + 4\,\overline{u}.$$

$\overline{X}_1 + \overline{X}_2 =$ 

On peut continuer de la même manière la vérification de toutes les propositions précédentes.

Nous avons établi grâce à l'algèbre vectorielle un langage de travail qui, d'une part, peut permettre des analyses des œuvres du passé, et de l'autre, des constructions nouvelles par la mise en fonction des composantes entre elles (compositions des ensembles H, G, U). Des recherches algébriques menées en parallèle avec des recherches expérimentales à l'aide d'ordinateurs couplés à des convertisseurs analogiques pourraient nous renseigner sur les relations linéaires d'une multiplicité vectorielle de manière à obtenir des timbres d'instruments existants, ou toutes sortes d'événements sonores.

Voici maintenant une application à l'analyse d'un fragment de la sonate op. 57 (Appassionata) de Beethoven. On fait abstraction du timbre considéré unique et homogène sur le registre de ce fragment :



Soient les vecteurs unitaires,

$\overline{h}$, 1 $\triangleq$ demi-ton; $\overline{g}$, 1 $\triangleq$ 10 db; $\overline{u}$, 1 $\triangleq$ 𝅘𝅥𝅯

avec pour origine :

sur l'axe de $\overline{h}$: 

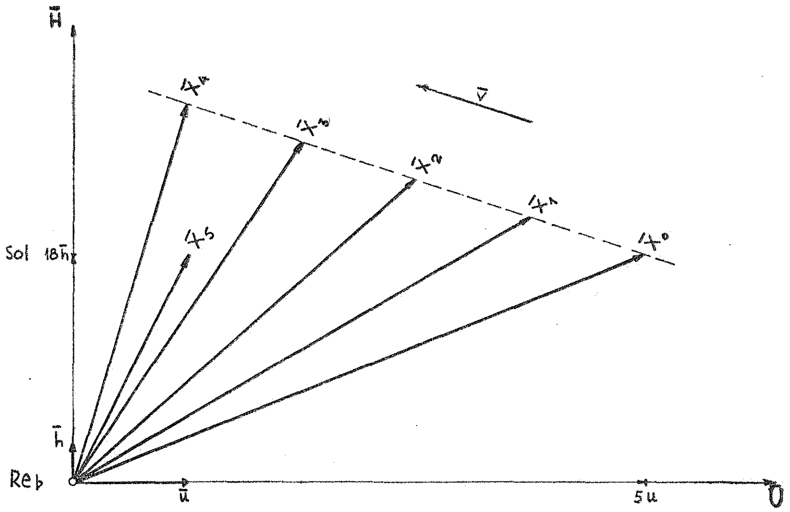
sur l'axe de $\overline{g}$: ff $\triangleq$ 60 db (ne varie pas),

sur l'axe de $\overline{u}$: 5 𝅘𝅥𝅯

considérons l'ensemble A :

Algèbre (opérations et relations) hors-temps.

Au sol correspond le vecteur $\overline{X}_0 = 18\overline{h} + 0\overline{g} + 5\overline{u}$
Au si *b* correspond le vecteur $\overline{X}_1 = (18 + 3)\,\overline{h} + 0\overline{g} + 4\overline{u}$
Au ré *b* correspond le vecteur $\overline{X}_2 = (18 + 6)\,\overline{h} + 0\overline{g} + 3\overline{u}$
Au mi correspond le vecteur $\overline{X}_3 = (18 + 9)\,\overline{h} + 0\overline{g} + 2\overline{u}$
Au sol correspond le vecteur $\overline{X}_4 = (18 + 12)\,\overline{h} + 0\overline{g} + 1\overline{u}$
Au sol correspond le vecteur $\overline{X}_5 = (18 + 0)\,\overline{h} + 0\overline{g} + 1\overline{u}$



admettons aussi le vecteur libre $\overline{v} = 3\overline{h} + 0\overline{g} - 1\overline{u}$, alors les vecteurs $\overline{X_i}$ (pour $i = 0, 1, 2, 3, 4$) sont de la forme $\overline{X}_i = \overline{X}_0 + \overline{v}.i$.

Nous remarquons que l'ensemble A est constitué par deux familles de vecteurs les $\overline{X_i}$ et $i.\overline{v}$ composés à l'aide de l'addition.

Une deuxième loi de composition existe dans l'ensemble $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$; c'est une progression arithmétique.

Enfin, le scalaire i conduit à une variation antisymétrique des composantes $\overline{h}$ et $\overline{u}$ des $\overline{X_i}$, la deuxième $\overline{g}$ restant invariante.

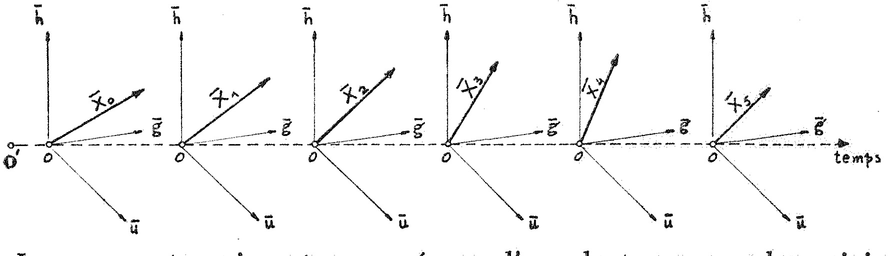
Algèbre temporelle (dans l'ensemble T).

L'énoncé sonore des vecteurs $\overline{X_i}$ de l'ensemble A est successif :

$$\overline{X_0}T\overline{X_1}T\overline{X_2}T...$$

(T est l'opérateur : *avant.*)

Ceci revient à dire que l'on fait subir à l'origine O de la base de $A \triangleq E_3 \triangleq V$, un déplacement sur l'axe du temps, une translation qui n'a rien à voir avec le changement de repère qui est en fait une opération intérieure à l'espace E_3 de base $\overline{h}, \overline{g}, \overline{u}$. Ainsi, dans le cas d'une simultanéité des attaques des six vecteurs précédents (accord), le déplacement serait nul.



Les segments qui sont proposés sur l'axe du temps par les origines O des $\overline{X_i}$ sont égaux et obéissent à la fonction, $\Delta t_i = \Delta t_j$ qui est une loi de composition interne dans l'ensemble T; ou encore, en admettant une origine O' sur l'axe du temps et un segment-unité égal à Δt : $t_i = a + i.\Delta t$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$.

Algèbre en-temps (relations entre l'espace E_3 et l'ensemble T).

On peut dire que les vecteurs $\overline{X_i}$ de A ont des composantes H, G, U, qui peuvent être exprimées en fonction d'un paramètre t_i, qui ici prend les valeurs $t_i = i.\Delta t$ ordonnées lexicographiquement et définies par l'ordre croissant de i = 1, 2, 3, 4, 5. Ceci constitue une association de chacune des composantes avec l'ensemble ordonné T. C'est donc une algébrisation, non seulement des événements sonores indépendamment du temps (algèbre hors-temps) mais également en fonction du temps (algèbre en-temps).

En général, nous admettons qu'un vecteur $\overline{X}$ est fonction du paramètre t du temps si ses composantes le sont également. On l'écrit :

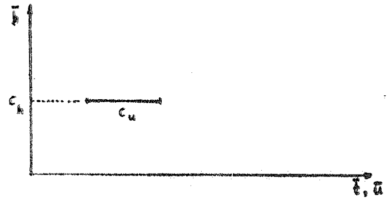
$$\overline{X}(t) = H(t)\overline{h} + G(t)\overline{g} + U(t)\overline{u}$$

Dans le cas où ces fonctions sont continues elles admettent une dérivée. Voici le sens que l'on peut donner à des variations de $\overline{X}$ en fonction du temps t. Soit :

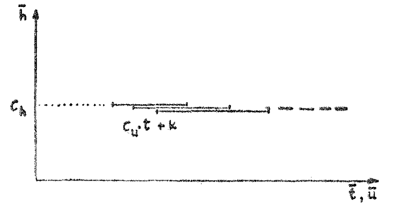
$$\frac{d\overline{X}}{dt} = \frac{dH}{dt}\overline{h} + \frac{dG}{dt}\overline{g} + \frac{dU}{dt}\overline{u}$$

et en négligeant la variation de la composante G, nous aurons :

pour $\frac{dH}{dt} = O$, $(H = c_h)$ et $\frac{dU}{dt} = O$, $(U = c_u)$: H et U sont indépendants de la variation de t, et pour $c_h \neq O, c_u \neq O$, l'événement sonore sera de hauteur et de durée invariables. Si $c_h, c_u = O$, alors pas de son, silence.

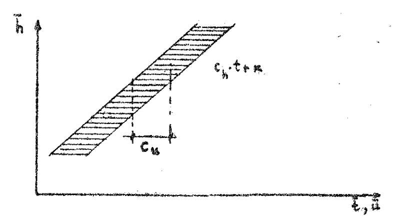


pour $\frac{dH}{dt} = O$, $(H = c_h)$ et $\frac{dU}{dt} = c_u$, $(U = c_u . t + k)$: si c_h et $c_u \neq O$, alors on a une infinité de vecteurs à l'unisson. Si $c_u = O$, alors on a un seul vecteur de hauteur c_h constante et de durée $U = k$.

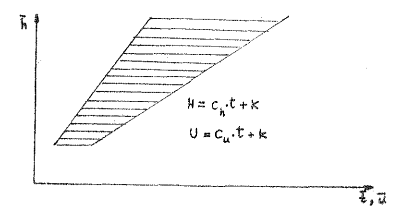


pour $\dfrac{dH}{dt} = O$, $(H = c_h)$ et $\dfrac{dU}{dt} = f(t)$, $(U = F(t))$: famille d'infinité de vecteurs à l'unisson.

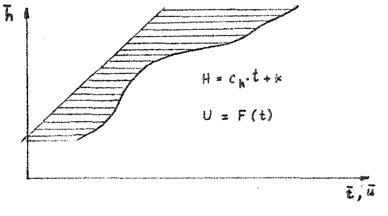
pour $\dfrac{dH}{dt} = c_h$, $(H = c_h.t + k)$ et $\dfrac{dU}{dt} = O$, $(U = c_u)$: si $c_u < \varepsilon$, $\lim \varepsilon = O$, alors on a un *glissando* constant d'un seul son. Si $c_u > O$, alors on a un accord constitué d'une infinité de vecteurs de durée c_u (épais glissando constant).



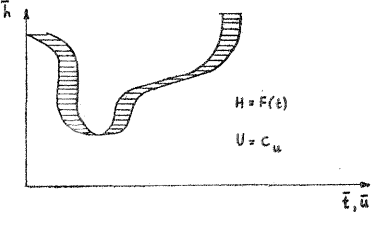
pour $\dfrac{dH}{dt} = c_h$, $(H = c_h.t + k)$ et $\dfrac{dU}{dt} = c_u$, $(U = c_u.t + r)$: c'est un accord d'une infinité de vecteurs de durées et de hauteurs variables.



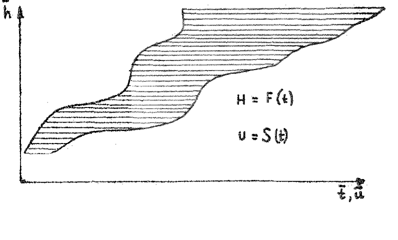
pour $\dfrac{dH}{dt} = c_h$, $(H = c_h.t + k)$ et $\dfrac{dU}{dt} = f(t)$, $(U = F(t))$: on a un accord d'une infinité de vecteurs.



pour $\dfrac{dH}{dt} = f(t)$, $(H = F(t))$ et $\dfrac{dU}{dt} = O$, $(U = c_u)$: si $c_u < \varepsilon$, lim. $\varepsilon = O$, alors on a un glissando variable d'une hauteur fine. Si $c_u > O$, alors on a un accord d'une infinité de vecteurs de durée c_u, (épais glissando variable).



pour $\dfrac{dH}{dt} = f(t)$, $(H = F(t))$ et $\dfrac{dU}{dt} = s(t)$, $(U = S(t))$: on a un accord d'une infinité de vecteurs.



Dans l'exemple de Beethoven, l'ensemble A des vecteurs $\overline{X_i}$ n'est pas une fonction continue de t. On peut écrire la correspondance :

$$\begin{array}{c|cccccc} & \overline{X_0} & \overline{X_1} & \overline{X_2} & \overline{X_3} & \overline{X_4} & \overline{X_5} \\ \downarrow & t_0 & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 & t_5 \end{array}$$

C'est en raison de cette correspondance que les vecteurs ne sont pas commutables.

Ensemble B. — Il présente une analogie avec l'ensemble A. La différence fondamentale réside dans le changement de la base dans l'espace E_3 par rapport à la base de A. Mais nous n'allons pas poursuivre l'analyse.

EXTENSION DES TROIS ALGEBRES AUX ENSEMBLES D'EVENEMENTS SONORES (Une application).

Nous avons discerné dans ce qui précède trois espèces d'algèbres :

a. L'algèbre des composantes d'un événement sonore avec son langage vectoriel, indépendamment du déroulement temporel, donc une *algèbre hors-temps*.

b. Une *algèbre temporelle* que les événements sonores viennent créer sur l'axe des temps (temps métrique), indépendamment de l'espace vectoriel.

c. Une algèbre *en-temps* découlant des correspondances et relations fonctionnelles entre les éléments des deux ensembles : 1° L'ensemble des vecteurs $\overline{X}$ et 2° l'ensemble des temps métriques T indépendant de l'ensemble des $\overline{X}$.

Or, tout ce qui a été dit à propos des événements sonores en soi ou à propos de leurs composantes et du temps, peut se généraliser à des ensembles d'événements sonores $\overline{X}$ et à des ensembles T.

Dans ce chapitre, nous avons sous-entendu connue la définition de la notion d'ensemble et en particulier la notion de classe telle qu'elle est comprise par l'algèbre de Boole, de plus nous adopterons les particularités de cette algèbre qui est isomorphe à la théorie des ensembles.

Pour simplifier l'exposé, nous prendrons immédiatement un exemple concret en considérant l'*ensemble de référence* R constitué par tous les sons d'un piano et dont on ne tient compte que des hauteurs; les timbres, attaques, intensités, durées étant utilisés à des fins de clarté pendant l'exposé des opérations et relations logiques que nous allons infliger aux ensembles des hauteurs.

Soit donc un ensemble A de touches qui ont une propriété caractéristique. Ce sera la classe A, partie de l'ensemble R constitué par toutes les touches du piano.

Cet ensemble ou classe A est choisi a priori et la propriété caractéristique est le choix particulier d'un certain nombre de touches.

Pour l'observateur amnésique on peut énoncer cette classe en faisant tinter les touches l'une après l'autre, après un silence suffisant. Il en déduira qu'il a entendu une collection de sons, un égrènement d'éléments. Une autre classe B est choisie de la même manière (un certain nombre de touches) et énoncée après la classe A en faisant sonner les éléments de B.

L'observateur aura entendu deux classes A et B, et il note le fait temporel, A avant B; ATB (T = avant).

Ensuite, il commence à noter des relations entre les éléments des deux classes. Il se peut que certains éléments (touches) soient communs aux deux classes; les classes sont *conjointes*. Si aucun n'est commun, elles sont *disjointes*. Si tous les éléments de B sont communs à une partie de A, alors il en déduit que B est une classe *incluse* dans A. Si tous les éléments de B se retrouvent dans A et inversement, si tous les éléments de A se retrouvent dans B, il en déduit que les deux classes se confondent, qu'elles sont *égales*.

Prenons A et B de manière qu'elles aient quelques éléments communs. Faisons-lui entendre d'abord A, puis B, puis la partie commune. Il en déduira que :

a. Il a été fait un premier choix de touches, soit A;

b. Il a été fait un deuxième choix de touches, soit B;

c. On a considéré la partie commune de A et de B. On a donc utilisé l'opération de l'*intersection*, notée :

$$A.B \text{ ou } B.A.$$

Cette opération a donc engendré une nouvelle classe qui a été symbolisée par l'égrènement de la partie commune de A et de B.

Si après lui avoir égrené les classes A et B on lui fait entendre un mélange de tous les éléments de A et de B, il en déduira qu'on a considéré une nouvelle classe, qu'on a opéré une sommation logique des deux premières. Cette opération est la *réunion* et se note:

$$A + B, \text{ ou } B + A$$

Si après lui avoir symbolisé (joué) la classe A on lui fait entendre tous les sons de R sauf ceux de A, il en déduit qu'on a choisi le complément de A par rapport à R. C'est une nouvelle opération, la *négation* qui se note : $\overline{A}$.

Jusqu'ici nous avons montré par une expérience imaginaire que nous pouvons :

a. Définir et *énoncer des classes d'événements sonores* (en prenant des précautions de clarté dans la symbolisation);

b. *Effectuer les trois opérations* logiques fondamentales, l'intersection, la réunion, la négation.

Par contre, l'observateur doit faire un travail intellectuel pour en déduire *et* les classes *et* les opérations. Nous nous sommes placé au niveau de l'appréhension immédiate et nous avons remplacé les signes graphiques par des événements sonores. Ces événements sonores nous les considérons comme des symboles d'êtres abstraits munis de relations abstraites de la logique et sur lesquels on peut effectuer au moins les opérations fondamentales de la logique des classes. Nous n'avons pas admis des symboles spéciaux pour les énoncés des classes, seul l'égrènement des éléments génériques est admis (dans certains cas, si les classes sont déjà connues, on peut s'il n'y a pas d'ambiguïté, prendre des raccourcis dans l'énoncé et admettre une sorte de sténosymbolisation mnémotechnique et même psychophysiologique). Nous n'avons pas admis des symboles spéciaux pour les trois opérations qui, graphiquement, sont exprimées par : ., +, —; seules les classes résultantes de ces opérations sont exprimées, par conséquent les opérations sont déduites mentalement par l'observateur. De même, la relation d'égalité de deux classes doit être déduite par l'observateur, ainsi que la relation d'implication qui repose sur la relation d'inclusion; la classe vide, par contre, peut être symbolisée par un silence dûment présenté. Donc, pour nous résumer, nous ne pouvons qu'énoncer des classes. Voici la liste de correspondance entre la symbolisation sonore et la symbolisation graphique telle que nous venons de la définir :

Symboles graphiques	*Symboles sonores*
Classes A, B, C,...	Egrènement des éléments génériques ayant la propriété A, B, C,... (avec des raccourcis possibles).
Intersection (.)	———
Réunion (+)	———
Négation (—)	———
Implication (→)	———
Appartenance (ε)	———

$A . B$	Egrènement des éléments de A.B.
$A + B$	Egrènement des éléments de A+B.
$\overline{A}$	Egrènement des éléments R qui ne sont pas A.
$A \supset B$	———
$A = B$	———

Ce tableau montre que nous pouvons raisonner en fixant les pensées par des sons; même dans le cas présent où par souci d'économie des moyens et pour rester près de l'intuition immédiate, à partir de laquelle toutes les sciences sont bâties, nous ne voulons pas encore proposer des conventions sonores pour symboliser les opérations ., +, —, et les relations =, →. Ainsi des propositions de la forme A, E, I, O ne peuvent être symbolisées par les sons, non plus des théorèmes. Les syllogismes et les démonstrations de théorèmes ne peuvent être faits que mentalement.

Outre ces opérations et relations logiques, hors-temps, nous avons vu que nous pouvons obtenir des classes temporelles (classes T), issues du symbolisme sonore qui définit des distances (intervalles) sur l'axe du temps. Le rôle du temps est à nouveau défini d'une nouvelle manière. Il sert en premier lieu de creuset, de moule, d'espace dans lequel s'inscrivent les classes dont on doit *déchiffrer* les relations. Le temps est, en quelque sorte, équivalent à l'aire de la feuille de papier ou du tableau noir. Ce n'est qu'en second lieu seulement qu'on peut le considérer comme comportant des éléments génériques (les distances temporelles) et des relations et opérations entre ces éléments (algèbre temporelle).

Des relations et des correspondances entre ces classes temporelles et les classes hors-temps peuvent être établies et nous retrouvons au niveau des classes les opérations et les relations en-temps.

Après ces considérations générales, nous allons donner un exemple de composition musicale construite à l'aide de l'algèbre des classes.

Pour cela il nous faut chercher une nécessité, un nœud d'intérêt.

La construction

Toute expression ou fonction Booléenne F(A, B, C), par exemple de trois classes A, B, C, peut se mettre sous la forme dite *canonique disjonctive :*

$$\sum_{i=1}^{8} \varepsilon_i k_i$$

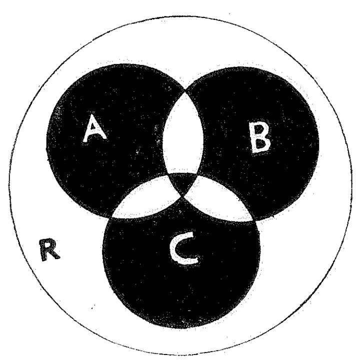
où $\varepsilon_i = 0; 1$

et $k_i = A.B.C,\ A.B.\overline{C},\ A.\overline{B}.C,\ A.\overline{B}.\overline{C},\ \overline{A}.B.C,\ \overline{A}.B.\overline{C},\ \overline{A}.\overline{B}.C,\ \overline{A}.\overline{B}.\overline{C}.$

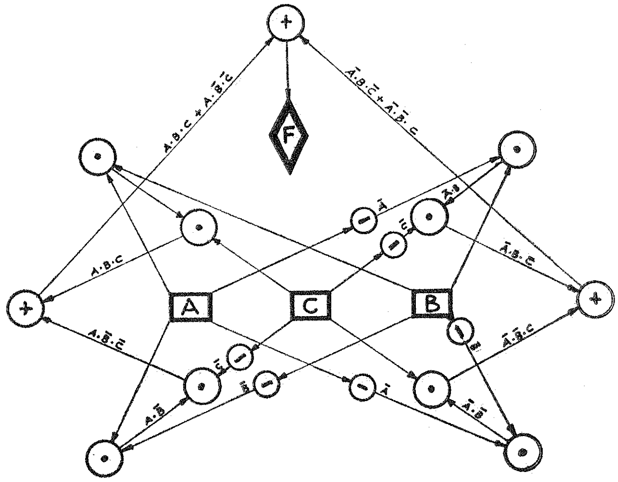
Une fonction booléenne à n variables peut toujours être écrite de manière à faire intervenir un maximum d'opérations $+, ., —$ égal à $3n.2^{n-2} - 1$. Pour $n = 3$, ce nombre est 17 et se trouve dans la fonction:

(1) $$F = A.B.C + A.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.\overline{C} + \overline{A}.\overline{B}.C.$$

A l'aide des cercles d'Euler et pour des classes conjointes deux à deux, la fonction (1) se dessine :



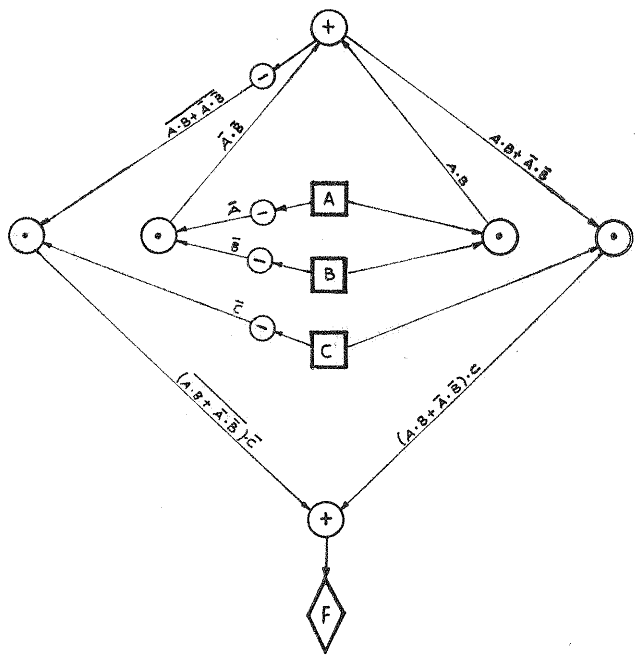
Et voici l'organigramme des opérations :



Cette même fonction F peut être obtenue avec 10 opérations seulement :

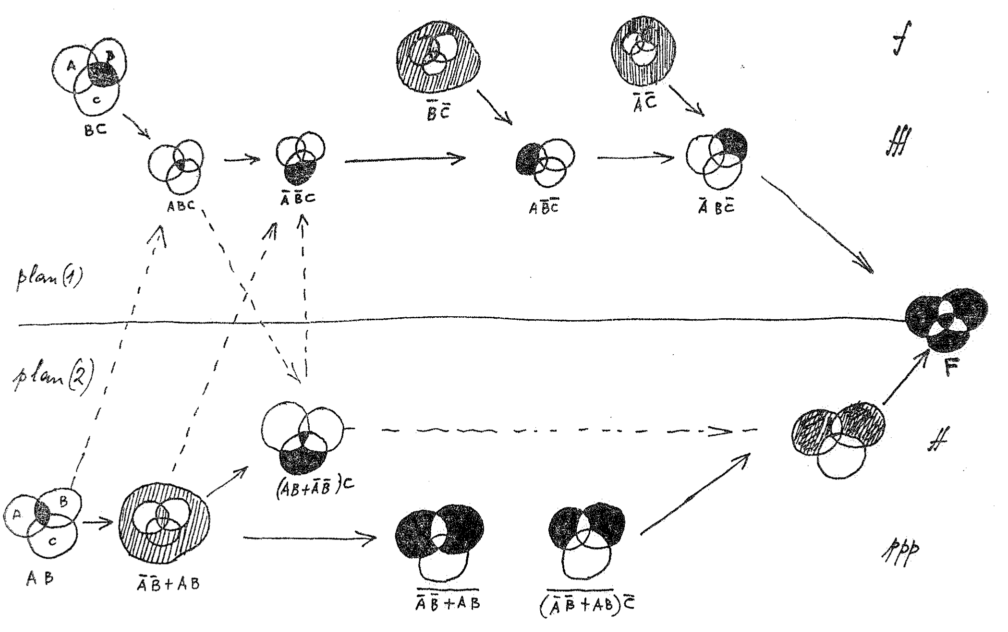
(2) $$F = (A.B + \bar{A}.\bar{B}).C + \overline{(A.B + \bar{A}.\bar{B})}.\bar{C}$$

dont voici l'organigramme :

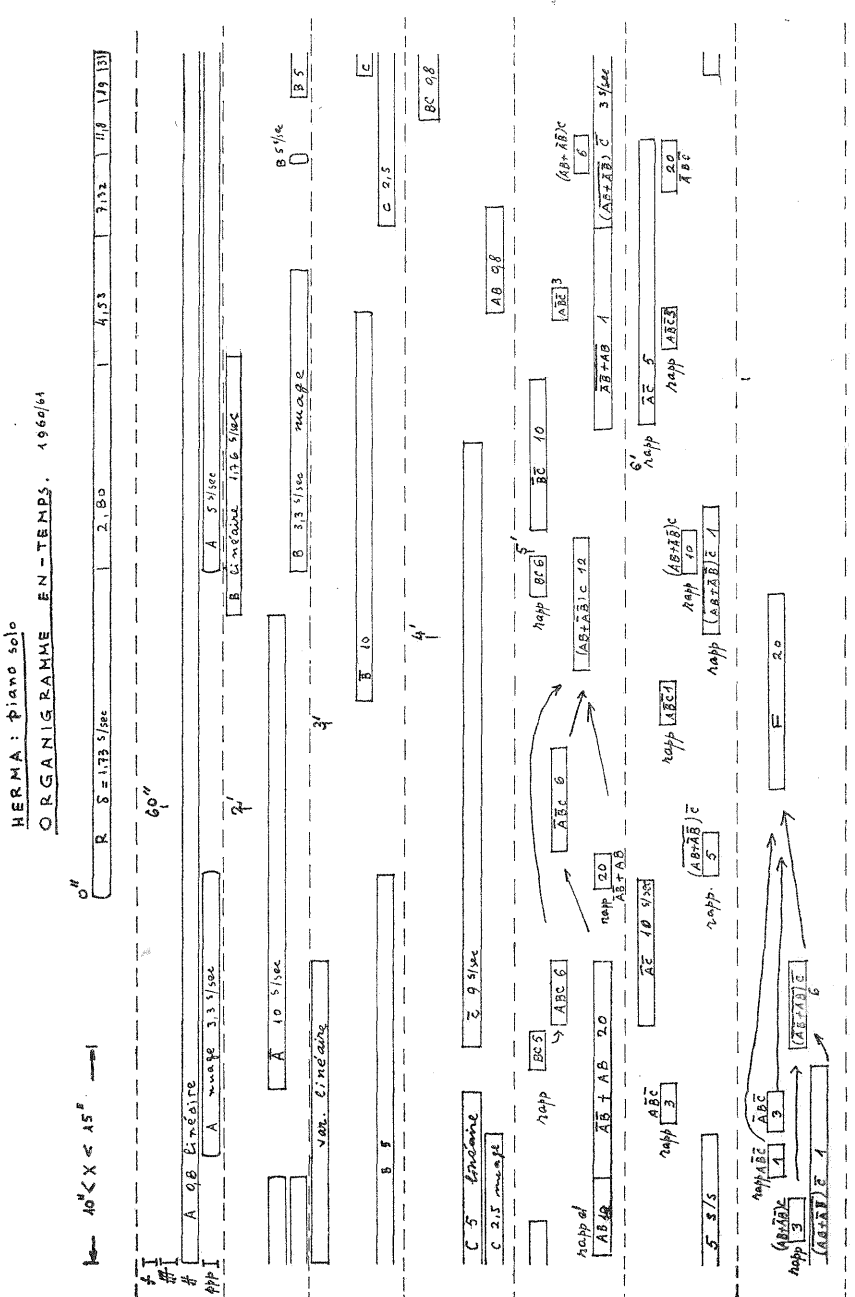


En confrontant les deux expressions de F qui définissent chacune une procédure différente dans la composition des classes A, B, C, nous remarquons dans (1) une symétrie plus élégante que dans (2). Par contre la (2) est plus économique (10 opérations contre 17). C'est cette confrontation qui a été choisie pour la réalisation de l'œuvre *Herma* pour piano.

Voici l'organigramme qui ordonne les opérations de (1) et de (2) sur deux plans parallèles :



Et enfin le plan précis de sa construction générale :


HERMA : piano solo
ORGANIGRAMME EN-TEMPS. 1960/61

Les trois classes A,B,C, résultent donc d'un choix approprié de touches de l'ensemble du clavier. Il existe une correspondance stochastique entre la composante des hauteurs et les dates d'occurrence dans l'ensemble T qui suivent elles aussi une loi stochastique. Les intensités et les densités (nombre de vecteurs par seconde) ainsi que les silences servent à la clarté de la composition par étage.

Cette œuvre composée de 1960 à 1961 a été créée par l'extraordinaire pianiste japonais Yuji Takahashi à Tokyo en février 1962.

En conclusion, nous avons raisonné sur des éléments génériques relativement simples. Avec des éléments génériques beaucoup plus complexes nous aurions pu décrire les mêmes relations et opérations logiques. Nous aurions simplement changé d'étage. Une algèbre sur plusieurs niveaux parallèles est ainsi possible avec des opérations et relations transversales entre les niveaux.

CONCLUSIONS
ET
EXTENSIONS

CONCLUSIONS ET EXTENSIONS

J'ai esquissé les cadres généraux d'une attitude artistique qui, pour la première fois, utilise les mathématiques sous trois angles fondamentaux :

1° Résumé philosophique de l'être et de son évolution. Exemple : loi de Poisson;

2° Appui qualitatif et mécanisme du Logos. Exemple : la Logique Symbolique, la Théorie des Ensembles, la Théorie des Evénements en Chaîne, la Théorie des Jeux;

3° Instrument de mensuration qui affine l'investigation et la réalisation, la perception aussi. Exemple : le Calcul de l'Entropie, le Calcul matriciel, le Calcul vectoriel.

Faire de la musique signifie exprimer l'intelligence humaine par des moyens sonores. Intelligence dans son sens le plus large qui comprend non seulement les cheminements de la logique pure, mais aussi ceux de la logique des affectivités et de l'intuition. Or, les techniques exposées ici, quoique souvent rigoureuses dans leurs structures internes, laissent bien des brèches par lesquelles peuvent pénétrer les facteurs les plus complexes et les plus mystérieux de l'intelligence. Ces techniques s'exercent constamment entre les deux vieux pôles, unifiés par la science et par la philosophie modernes : le déterminisme, la fatalité, et le libre arbitre, le choix inconditionné. Entre les deux pôles se trouve la vie mouvante de tous les jours, partiellement fatale, partiellement modifiable, avec toute la gamme des interpénétrations et des interprétations.

La formalisation et l'axiomatisation constituent en réalité un guide processionnel, plus adapté à la pensée moderne en général. Elle permet de placer d'emblée sur un terrain plus universel l'art des sons, et de le rapprocher à nouveau des astres, des nombres et de la richesse du cerveau humain, comme jadis aux grandes phases des civilisations antiques : les mouvements des sons qui provoquent en nous des mouvements concordants à ceux-là... « procurent un vulgaire plaisir à ceux qui ne savent pas raisonner; et à ceux qui savent, une joie raisonnée, par l'imitation de la divine harmonie qu'ils réalisent dans des mouvements périssables. » (Platon, *Timée*).

Les thèses défendues dans cet exposé sont une première esquisse, mais elles permettent déjà les applications et même certaines extensions.

Imaginons en effet que toutes les hypothèses de la composition stochastique généralisée (chapitre II) soient appliquées aux phénomènes de la vision. Ainsi, à la place des grains acoustiques, imaginons les quanta de lumière, c'est-à-dire les photons. Les composantes dans l'hypothèse atomique du son : intensité, fréquence, densité et le temps lexicographique, sont alors adaptées aux quanta de la lumière. Une source unique de photons, un canon à photons, pourrait théoriquement reproduire par l'émission de photons d'un choix particulier de fréquences, d'énergie et de densité, les trames acoustiques envisagées précédemment. De cette manière nous pourrions créer des flux lumineux analogues à ceux de la musique issue d'une source sonore. Si à présent, nous lui adjoignions les coordonnées de l'espace, nous pourrions obtenir une musique spatiale de lumière, une sorte de stéréo-lumière. Il suffirait de combiner autant de canons à photons que l'on désire dans tous les coins d'un espace auréolé. Techniquement cela est possible, mais il faudrait que les peintres sortent de leur léthargie artisanale, et qu'ils abandonnent leurs pinceaux et leurs mains, ou bien que de nouveaux types d'artistes de la vision s'emparent de ces nouvelles idées, de ces nouvelles techniques et de ces nouveaux besoins.

Une œuvre d'art visuelle nouvelle et riche peut surgir dont l'évolution serait réglée par des cerveaux électroniques géants, outils précieux non seulement pour le calcul des fusées ou des indices de prix, mais aussi outils de la vie artistique de l'avenir, en une manifestation audiovisuelle totale réglée dans son intelligence compositionnelle par les machines asservies à d'autres machines, elles-mêmes dirigées par l'homme, grâce aux Arts Scientifiques.

APPENDICES

APPENDICE I

(cf. bibl. 7,20)

DEUX LOIS GENERALES DES PROBABILITES CONTINUES

1° Formule $P_x = c.e^{-cx}.dx$.

Soit OA un segment de droite de longueur L sur lequel nous plaçons N points; leur densité linéaire est $c = N/L$. Supposons que la longueur L du segment OA et N augmentent indéfiniment, la densité linéaire $c = N/L$ restant constante. Supposons aussi que ces points soient numérotés et soient A_1, A_p, A_q, A_r..., ces points, répartis de gauche à droite à partir de l'origine O. Posons

$$x_1 = A_1A_p, \quad x_2 = A_pA_q, \quad x_3 = A_qA_r, \ldots, \quad x_i = A_sA_t, \ldots$$

La probabilité pour que le i-ième segment ait une longueur x_i comprise entre x et x + dx est

$$P_x = e^{-cx}.c.dx$$

Cette probabilité est composée de la probabilité $p_o = e^{-cx}$ pour qu'il n'y ait aucun point sur le segment x et de la probabilité $p_1 = c.dx$ pour qu'il y ait un point dans dx.

Or, la probabilité p_n pour qu'il y ait n points sur un segment x est donnée par la formule de récurrence

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} = \frac{c.x}{n+1} \quad \text{donc} \quad p_1 = \frac{c.x.}{1} p_o.$$

$$\text{Mais } p_o = e^{-cx} \quad \text{et} \quad e^{-cx} = 1 - \frac{cx}{1!} + \frac{(cx)^2}{2!} - \frac{(cx)^3}{3!} + ...$$

Si x est très petit et si nous le désignons par dx, nous avons

$p_o = 1 - c.dx + \dfrac{c^2.(dx)^2}{2!} - ...$ mais les puissances de dx sont des infiniment petits d'ordre supérieur donc,

$$p_o = 1 - c.dx \quad \text{et} \quad p_1 = c.dx.p_o = c.dx$$

Calcul approché de la même probabilité (pour le calcul à la main).

Soit d points à placer sur une droite de longueur L. La densité linéaire est $c = d/L$ points sur la longueur L. Si les longueurs sont exprimées en unités v alors $L = a.v$ $(a > O)$ et $c.v = d/a$ points dans l'unité de longueur v.

Puis $x_i = i.v, (i = 0, 1, 2, 3, ...)$

et la probabilité, limite asymptotique de la fréquence relative du segment x_i sera,

$$P_{x_i} = e^{-civ}.c.\Delta x_i \tag{1}$$

Nous allons définir la quantité Δx_i.

La probabilité (1) est composée de la probabilité $p_o = e^{-civ}$ pour qu'il n'y ait aucun point sur x_i et de la probabilité $p_1 = c.\Delta x_i$ pour qu'il y ait un point dans Δx_i à la condition que $(c.\Delta x_i)^2$ soit suffisamment petit pour être négligé. Posons

$$O < (c.\Delta x_i)^2 < 10^{-n}$$

où n est un nombre naturel assez grand; il vient,

$$O < \Delta x_i < c^{-1}.10^{-n/2}$$

substituons maintenant à Δx_i une constante z telle que pour tout x_i,

$$z \leqslant \Delta x_i < c^{-1}.10^{-n/2} \qquad (2)$$

Alors la relation (1) s'écrit,

$$P_{x_i} = e^{-civ}.cz \qquad (3)$$

et doit satisfaire la condition,

$$\sum_{i=O}^{i=\infty} e^{-civ}.cz = 1$$

ou encore,

$$z = \frac{1}{c.\sum_{i=O}^{i=\infty} e^{-civ}}$$

mais $\sum_{i=0}^{i=\infty} (e^{-cv})^i = \frac{1}{1 - e^{-cv}}$ car, puisque cv > 0 on a $e^{-cv} < 1$

enfin $$z = \frac{1 - e^{-cv}}{c}.$$

Or d'après (2) $\frac{1 - e^{-cv}}{c} < \frac{10^{-n/2}}{c}$ par conséquent :

$$0 < 1 - e^{-cv} < 10^{-n/2}, \quad \text{puis } 1 - 10^{-n/2} < e^{-cv} < 1$$

ainsi, pour $cv > 0$ on a $e^{-cv} < 1$, et pour $cv < -\text{Log}\,(1 - 10^{-n/2})$

on a $e^{-cv} > 1 - 10^{-n/2}$. Et puisque $0 < 10^{-n/2} < 1$ on a

$$-\text{Log}\,(1 - 10^{-n/2}) = 10^{-n/2} + \frac{10^{-(n/2)2}}{2} + \frac{10^{-(n/2)3}}{3} + \frac{10^{-(n/2)4}}{4} + \dots$$

$$\text{et } 10^{-n/2} < -\text{Log}\,(1 - 10^{-n/2}).$$

Il suffit donc que $cv \leqslant 10^{-n/2}$ (4) pour que $e^{-cv} > 1 - 10^{-n/2}$. Alors

on peut prendre $\Delta x_i = z = \dfrac{1 - e^{-cv}}{c}$ (5) et substituer cette valeur dans

la formule (1) grâce à laquelle nous pouvons maintenant former des tables de probabilité. Voici un exemple :

Soit $d = 10$ points en moyenne à répartir sur un segment de droite de longueur $L = 100$ cm. Définir x_i et P_{x_i} en fonction de i étant donné que $(c.\Delta x_i)^2 = 10^{-4}$ est considéré négligeable.

De la (4) $cv = 10^{-4/2} = 0{,}01$ points dans v. Or $c = d/L = 10/100$ points par cm de longueur, donc $c = 0{,}1$ points/cm, et $v = 0{,}01/0{,}1 = 0{,}1$ cm, et $x_i = 0{,}1.i$ cm. $\triangleq$ i mm.

De la (5); $\Delta x_i = \dfrac{1 - e^{-0{,}01}}{0{,}1} = (1 - 0{,}9905).10 = 0{,}0995 \triangleq 0{,}1$ cm.

De la (1); $P_{x_i} = e^{-0{,}01.i}.0{,}1.0{,}1 = 0{,}01.(0{,}99005)^i$.

Pour le calcul à la machine voir chapitre IV.

II. Formule $f(j)dj = \frac{2}{a}(1 - \frac{j}{a})dj$.

Chaque variable (fréquence, intensité, densité, etc.), forme avec sa précédente un intervalle (distance). Chaque intervalle est identifié à un segment x pris sur l'axe de la variable. Soit deux points A et B de cet axe, correspondant aux bornes inférieure et supérieure de la variable. Il s'agit de tirer au hasard un segment de longueur x intérieur à AB et compris entre j et j + dj pour $0 \leq j \leq AB$. Alors la probabilité de cet événement est :

$$(1) \qquad P_j = f(j)dj = \frac{2}{a}(1 - \frac{j}{a})dj \qquad \text{pour } a = AB.$$

Définition approchée de cette probabilité pour le calcul à la main.

En supposant dj constant et j discontinu on pose :

$$dj = c, \quad j = i.v \quad \text{avec} \quad v = \frac{a}{m} \quad \text{pour} \quad i = 0,1,2,3,..., m.$$

L'équation (1) devient : $P_j = \frac{2}{a}(1 - \frac{iv}{a})c$. Mais, (2)

$$\sum_{i=o}^{i=m} P_j = \frac{2c}{a}(m+1) - \frac{2cv}{a^2}\sum_{i=o}^{i=m} i = \frac{2c(m+1)}{a} - \frac{2cvm(m+1)}{2.a^2} = 1,$$

d'où : $dj = c = \frac{a}{m+1}$.

D'autre part P_j doit être pris en fonction de l'approximation décimale que l'on désire :

$$P_j = \frac{2}{m+1}\left(1 - \frac{i}{m}\right) \leqslant 10^{-n} \qquad (n = 0,1,2,3,...).$$

P_j est maximum lorsque $i = m$, d'où $m \leqslant 2.10^n - 1$, alors pour $m = 2.10^n - 1$, nous aurons $v = \dfrac{a}{2.10^n - 1}$ et $dj = \dfrac{a}{2.10^n}$ et la relation (1) devient :

$$P_j \triangleq P_i = \frac{2}{2.10^n}\left(1 - \frac{i}{2.10^n - 1}\right).$$

Définition de la même probabilité pour le calcul à la machine.

On sait que la machine ne peut que tirer des nombres y au hasard et avec équiprobabilité, $(0 \leqslant y \leqslant 1)$. Pour la loi de probabilité élémentaire P_j de (1) et pour un intervalle quelconque x_o, on a :

$$\text{probab.}\ (0 \leqslant j \leqslant x_o) = \int_o^{x_o} f(j)dj = \frac{2x_o}{a} - \frac{x_o^2}{a^2} = F(x_o),$$

$F(x_o)$ est la fonction de répartition des j. Mais,

$$F(x_o) = \text{probab.}\ (0 \leqslant y \leqslant y_o) = y_o$$

$$\text{donc,} \quad \frac{2x_o}{a} - \frac{x^2_o}{a^2} = y_o \quad \text{et} \quad x_o = a\,(1 \pm \sqrt{1 - y_o})$$

et en rejetant la racine avec le signe $+$ car x_o doit rester inférieur à a, on obtient :

$$x_o = a(1 - \sqrt{1 - y_o}) \quad \text{pour tout} \quad 0 \leqslant x_o \leqslant a.$$

APPENDICE II

(cf. bibl. 14)

Soient des événements $E_1, E_2, E_3, \dots, E_r$ avec $r < \infty$, dont l'un se produit nécessairement à chaque épreuve.

p_{hk} est la probabilité pour que l'événement E_k ait lieu quand E_h a eu lieu à l'épreuve précédente; $\sum_k p_{hj} = 1$, $(k = 1,2,\dots, r)$.

$P^{(n)}{}_{hk}$ est la probabilité pour qu'on passe en n épreuves de l'état E_h à l'état E_k; $\sum_k P^{(n)}{}_{hk} = 1$, $(k = 1,2,\dots, r)$.

Si pour $n \to \infty$ un des $P^{(n)}{}_{hk}$ tend vers une limite P_{hk}, cette limite est exprimée par la somme de tous les produits $P_{hj}.p_{jk}$; j étant l'indice d'un des événements intermédiaires E_j, $(1 \leqslant j \leqslant r)$:

$$P_{hk} = P_{h1}.p_{1k} + P_{h2}.p_{2k} + \dots + P_{hr}.p_{rk}.$$

La somme de toutes les limites P_{hk} est égale à 1 :

$$P_{h1} + P_{h2} + P_{h3} + \dots + P_{hr} = 1.$$

On peut former les tableaux (matrices) $D^{(n)}$ suivants :

$$D^{(n)} = \left| \begin{array}{llll} P^{(n)}{}_{11}, & P^{(n)}{}_{21}, & \dots & P^{(n)}{}_{r1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P^{(n)}{}_{1m}, & P^{(n)}{}_{2m}, & \dots, & P^{(n)}{}_{rm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P^{(n)}{}_{1r}, & P^{(n)}{}_{2r}, & \dots, & P^{(n)}{}_{rr} \end{array} \right|$$

Cas régulier: si au moins un des tableaux $D^{(n)}$ contient au moins une ligne m dont tous les éléments sont positifs alors les $P^{(n)}{}_{hk}$ ont des limites P_{hk} et parmi les P_{hk} il en existe au moins une qui ait une limite non nulle et indépendante de n et de h, la P_m. C'est le *cas régulier.*

Cas positivement régulier: si au moins un des tableaux $D^{(n)}$ a tous ses éléments positifs alors toutes les P_{hk} ont des limites P_k non nulles et indépendantes de l'indice initial h. C'est le *cas positivement régulier.*

Les probabilités $P_k = X_k$ constituent le système de solutions des r + 1 équations à r inconnues :

$$\begin{array}{lllll} X_1 = X_1p_{11} & + X_2p_{21} & + \dots & + X_rp_{r1} \\ X_2 = X_1p_{12} & + X_2p_{22} & + \dots & + X_rp_{r2} \\ X_3 = X_1p_{13} & + X_2p_{23} & + \dots & + X_rp_{r3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_m = X_1p_{1m} & + X_2p_{2m} & + \dots & + X_rp_{rm} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ X_r = X_1p_{1r} & + X_2p_{2r} & + \dots & + X_rp_{rr} \end{array}$$

$$1 = X_1 + X_2 + \dots + X_r$$

Mais ces équations ne sont pas indépendantes, car la somme des r premières donne une identité. Il reste donc, après substitution de la dernière à une quelconque des r premières, un système de r équations à r inconnues.

Or, on démontre que dans le cas régulier le système n'a qu'un seul système de solutions.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

(1) Meyer-Epler, W. « Grundlagen und Anwendungen der Informations Theorie », Springer-Verlag 1959.

(2) Stevens and Davies. « Hearing », Willey and Son, N.Y. 1948.

(3) Winkel, F. « Vues nouvelles sur le monde des sons », Dunod, Paris, 1960.

(4) Schaeffer, P. « A la recherche d'une musique concrète », Ed. du Seuil, Paris, 1952.

(5) Moles, A. « Théories de l'information et perception esthétique », Flammarion, Paris, 1958.

(6) Xenakis, I. « Les trois paraboles », Nutida Musik, Sveriges Radio, Stockholm, 1958/59.

(7) Borel, E. « Principes et formules classiques du calcul des probabilités ». Gauthier-Villars, Paris, 1947.

(8) Xenakis, I. « La crise de la musique sérielle », Gravesaner Blätter n° 1, 1955 et «Calcul des probabilités et musique», Gravesaner Blätter n° 6, 1956. Edit. Ars Viva Verlag, Mainz.

(9) Vessereau, A. « Méthodes statistiques en biologie et en agronomie », J.B. Baillière et Fils, Paris, 1948.

(10) Mather, K. « Statistical analysis in biology », Methuen & Co. Ltd, London, 1951.

(11) Levy, P. « Calcul des probabilités », Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1925.

(12) Borel, E. « Eléments de la théorie des probabilités », Albin Michel, Paris, 1950.

(13) Xenakis, I. « A la recherche d'une musique stochastique », Gravesaner Blätter, n° 11/12, Ars Viva Verlag, Mainz, 1957.

(14) Fréchet, M. « Méthode des fonctions arbitraires. Théorie des événements en chaîne dans le cas d'un nombre fini d'états possibles », Gauthier-Villars, Paris, 1952.

(15) Shannon, C. and Weaver, W. « The mathematical theory of communication », The University of Illinois Press, Urbana, 1949.

(16) Ross Ashby, W. « Introduction à la cybernétique », Dunod, Paris, 1958.

(17) Moles, A. « La création scientifique », Kister, Genève, 1957.

(18) Xenakis, I. « Notes sur un geste électronique », La Revue Musicale, Paris, 1959.

(19) Xenakis, I. « Eléments de musique stochastique », Gravesaner Blätter, n^os^ 18/19/20/21/22/23/24, Ars Viva Verlag, Mainz, 1960. « La musique stochastique », La Revue d'Esthétique, tome 14, fasc. III et IV, J. Vrin, Paris, 1961.

(20) Girault, M. « Initiation aux processus aléatoires », Dunod, Paris, 1959.

(21) Williams, J.D. « La stratégie », Dunod, Paris, 1956.

(22) Vajda, S. « Théorie des jeux et programmation linéaire », Dunod, Paris, 1959.

On peut lire utilement :

Hiller, L.A. & Isaacson, L.M. « Experimental Music » Mc Graw-Hill Book Co N.Y., 1959.

Tortrat, A. « Principes de statistiques mathématiques », Dunod, Paris, 1961.

Yaglom, A.M. — Yaglom, I.M. «Probabilité et information», Dunod, Paris, 1959.

Dugué, D. « Ensembles mesurables et probabilisables », Dunod, Paris, 1958.

Fucks, Wilhelm. « Musical Analysis by Mathematics », Gravesaner Blätter, n^os^ 23/24, Ars Viva Verlag, Mainz, 1961.

Mathews, Pierce and Guttman, « Musical Sounds from Digital Computers », Gravesaner Blätter N^os^ 23/24, Ars, viva Verlag, Mainz, 1961.

En particulier pour le chapitre V :

Blanché, R. « Introduction à la logique contemporaine », Armand Colin, Paris, 1957.

Boole, G. « The Mathematical Analysis of Logic », Basil Blackwell, Oxford, 1951.

Barbut, M. « Médiane, distributivité, éloignements », Ecole Pratique des Hautes Etudes, 6^e section, Paris, 1961.

Bourbaki, N. « Théorie des Ensembles », fasc. des résultats, Hermann, Paris, 1958.

Barbut, M. « Des trucs et des machins II : une illustration, la dualité des espaces vectoriels, » Ecole Pr. des H. E., 6^e section, Paris, 1961.

Guilbaud, G. Th. « Algèbres mexicaines et booléennes », cours 1960/61 à l'Ec. Pr. des H. E., 6^e section, Paris.

Guilbaud, G. Th. « Des trucs et des machins : comment faut-il enseigner les rudiments de la théorie dite des ensembles? », Ec. Pr. des H. E. 6^e section, Paris, 1961.

Piaget, J. « Le développement de la notion de temps chez l'enfant », Presses Universitaires, Paris.

Ville, M.J. « Eléments de l'Algèbre de Boole », Institut Henri Poincaré, 1955.

CATALOGUE DES ŒUVRES
DE
IANNIS XENAKIS

ŒUVRES INSTRUMENTALES DE IANNIS XENAKIS

Décembre 1962

Titre (Date comp.)	*Exécution (Dates) Chefs d'orchestre*	*Nb. instr.*	*Durée*	*Editeur*
Metastasis (1953-54)	Festival 1955 Donaueschingen H. Rosbaud Stockholm 1959 S. Ehrling Paris 1960 M. Le Roux	63	7'	Schott, Mainz
Pithoprakta (1955-56)	Musica Viva Münich 1957 H. Scherchen Genève 1958 H. Scherchen Paris 1960 H. Scherchen Fest. Varsovie 1962 W. Rowicki Tokyo 1963 M. Le Roux	49	10'	Schott, Mainz
Achorripsis (1956-57)	Buenos-Aires 1958 H. Scherchen Festiv. Darmstadt 1958 E. Bour Cologne 1959 H. Scherchen Hamburg 1959 (Neue Werk) H. Scherchen Maggio Fiorentino 1959 H. Scherchen Paris Concerts Lamoureux 1959 H. Scherchen Marseille 1962 Orch. RTF K. Simonovic New York 1963 Carnegie Hall G. Schuller	21	7'	Botte & Bock Berlin
Syrmos (1959)	Inédit Paris 1960	18 cordes	14'	
Analogiques A (et B) (1958-59)	Festival RTF A. Girard	9 cordes (+ bde élec.)	5' (+ 2' 30")	Edit. Franç. Mus.

Titre (Date comp.)	*Exécution (Dates) Chefs d'orchestre*	*Nb. instr.*	*Durée*	*Editeur*
—	—	—	—	—
Duel (1959)	Inédit (p^r 2 chefs)	54	var.	
Herma (1960-61)	Tokyo Récital 1962 Y. Takahashi Paris Domaine Musical 1963 G. Pludermacher	Piano solo	9'	
Formes Rouges (1961)	RTF	7	5'	
ST/10-1,080262 (1957-62)	Présentation Presse Mondiale chez IBM France Paris 1962 K. Simonovic	10 sol.	12'	
ST/48 (1962)	Inédit, commande RTF chaîne III	55	10'	
« Polla ta dina... » (Texte de Sophocle) (1962)	Festival Stuttgart 1962 H. Scherchen	Orchestre 47 + chœur enf.	6'	H. Wewerka, Münich
Atrées (Hommage à Pascal) (1962)	Emission Pascal commande RTF K. Simonovic	10 sol.	15'	Edit. Franç. Mus.
Morsima-Amorsima (1962)	Athènes 1962 L. Foss	4 sol. (pianos + 3 cordes)	10'	
Amorsima-Morsima (1962)	Athènes 1962 L. Foss	10 sol.	5'	
Stratégie (1962)	Festiv. Venise 1963 B. Maderna et K. Simonovic	88	var.	
ST/4-2 (1962)	Paris 1962 Quatuor de l'Ensemble de Musique Contemporaine de Paris Paris 1963 Quatuor Parrenin	Quatuor à cordes	9'	

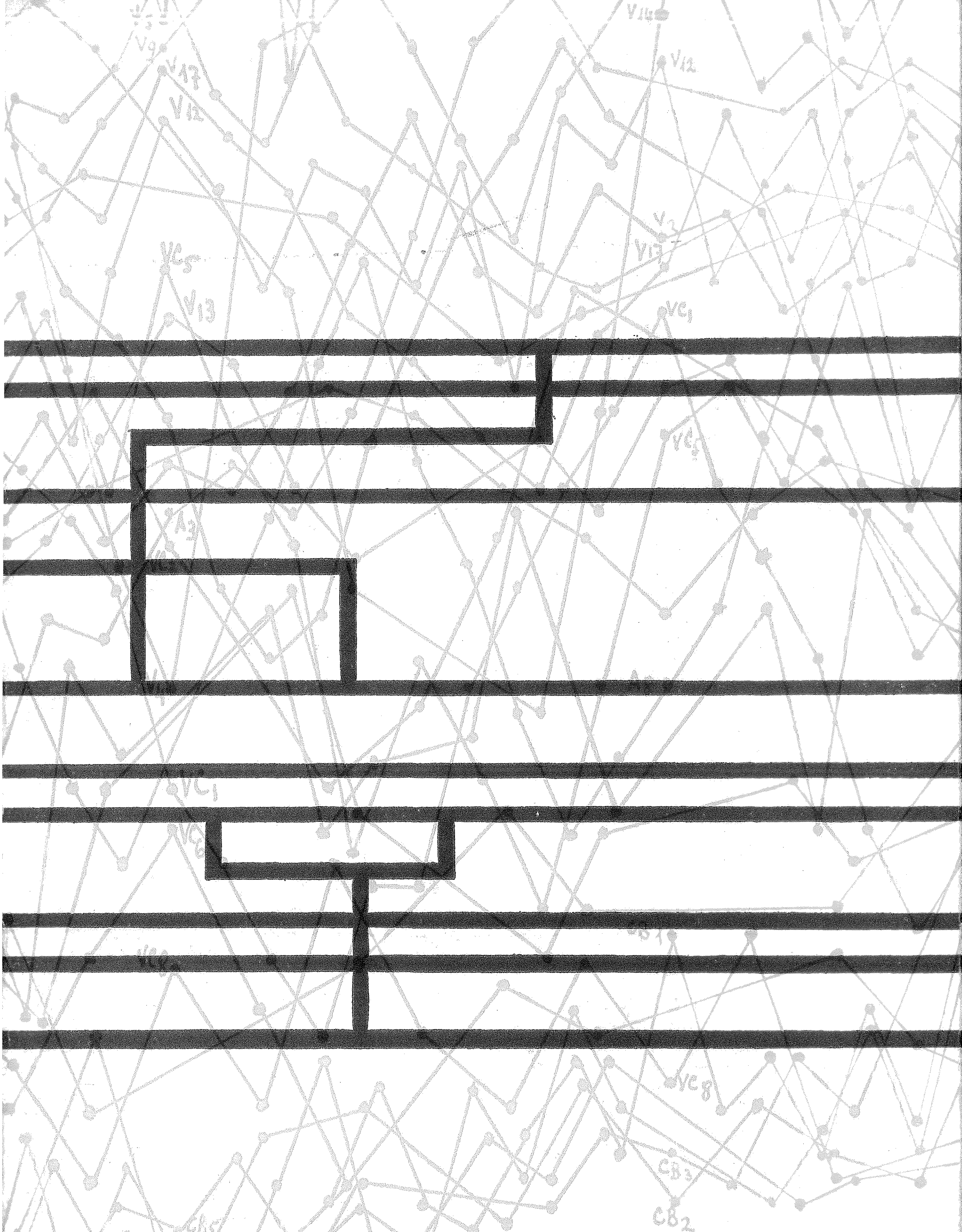
ŒUVRES ÉLECTRO-MAGNÉTIQUES

Diamorphoses	1957	RTF	Fest. Bruxelles Octobre 1958	7'	Boîte à Musique Paris
Concret PH	1958	Philips	Pavillon Philips Expo. Intern. Bruxelles 1958	2' 30"	Philips
Analogique B	1959	RTF	Gravesano 1959	2' 30"	Philips
Orient-Occident	1960	RTF	Stockholm 1963	12'	Philips
Bohor	1962	RTF	Salle des Conservatoires 1962	22'	

ACHEVÉ D'IMPRIMER EN OCTOBRE 1963 POUR LA REVUE MUSICALE, PAR LA SOCIÉTÉ NOUVELLE DES IMPRIMERIES MONT-LOUIS ET PRESSE RÉUNIES. 57, RUE BLATIN, CLERMONT-FERRAND

DÉPOT LÉGAL — 4e TRIMESTRE 1963

IMPRIMEUR N° 176 — ÉDITEUR N° 54



Gérant : **Albert RICHARD** France : **57 F.** — Etranger : **62 F.**