

## CHAPITRE II

# MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

*Maintenant, nous pouvons rapidement généraliser l'étude de la composition musicale à l'aide de la stochastique.*

*Le premier énoncé est que la stochastique est précieuse non seulement en musique instrumentale, mais aussi dans les musiques électromagnétiques. Nous l'avons montré avec plusieurs œuvres à l'appui :*

*Diamorphoses, 1957-58 (B.A.M. Paris).*

*Concret PH, (dans Pavillon Philips de l'Exposition de Bruxelles, 1958).*

*Orient-Occident, musique pour le film homonyme de E. Fulchignoni, produit par l'UNESCO, 1960.*

*Le deuxième énoncé est qu'elle peut conduire à la création de matériaux sonores nouveaux et à des formes nouvelles.*

*Pour cela, il faut au préalable faire une hypothèse qui concerne la nature du son, de tout son : [19].*

# MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

## Partie théorique

### HYPOTHÈSE DE BASE (Lemme) ET DÉFINITIONS [19].

TOUT son est une intégration de grains, de particules élémentaires sonores, de quanta sonores. Chacun de ces grains élémentaires a une triple nature : la durée, la fréquence et l'intensité \*. Tout son, toute variation sonore même continue est conçue comme un assemblage de grains élémentaires suffisamment nombreux et disposés dans le temps d'une façon adéquate. Donc : tout complexe sonore est analysable en séries de sons purs sinusoïdaux même si les variations de ces sons sinusoïdaux sont infiniment rapprochées, brèves et complexes. Dans l'attaque d'un son complexe, dans son corps, dans sa chute, des milliers de sons purs apparaissent dans un intervalle de temps  $\Delta t$  assez court. Des hécatombes de sons purs sont nécessaires à la création d'un son complexe. Il faudrait imaginer un son complexe comme un feu d'artifice de toutes couleurs dans lequel chaque point lumineux apparaîtrait et disparaîtrait instantanément sur le ciel noir. Mais dans ce feu il y aurait tellement de points lumineux et ils y seraient ainsi organisés que leur succession rapide et fourmillante créerait des formes, des volutes à déroulement lent ou au contraire des explosions brèves incendiaires de tout le ciel. Une ligne lumineuse serait constituée par une multitude suffisante de points apparaissant et disparaissant instantanément.

(\*) La description de la structure élémentaire des signaux sonores, qui est faite ici, sert de point de départ pour la réalisation musicale et n'est, par conséquent, qu'une image plutôt qu'un fait scientifiquement fondé. Elle peut cependant être considérée comme une première approche vers les considérations introduites dans la théorie de l'information par GABOR (voir Meyer-Eppler, p. 21, Grundlagen und Anwendungen der Informations theorie, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959). Dans la matrice dite de GABOR un événement sonore est résolu en signaux acoustiques élémentaires de très courtes durées effectives, dont l'amplitude peut également être divisée en quanta dans le sens de la théorie de l'information. Toutefois ces signaux élémentaires constituent des fonctions sinusoïdales ayant comme enveloppe une courbe de Gauss ou « en cloche ». Mais on peut à peu près se représenter ces signaux de GABOR par des sons sinusoïdaux de courte durée avec une enveloppe approximativement rectangulaire.

## MUSIQUES FORMELLES

En considérant la durée  $\Delta t$  du grain comme assez petite mais invariable nous pouvons la négliger dans ce qui va suivre et ne considérer que la fréquence et l'intensité.

Les deux natures physiques du son sont la fréquence et l'intensité associées. Elles constituent deux ensembles indépendants de par leur nature, le F et le G. Ils ont un ensemble produit, le  $F \times G$  qui est le grain élémentaire de son. En général l'ensemble F est une application univoque (homomorphe) dans l'ensemble G. Une application F dans G peut être donnée, soit par une représentation extensive, soit par une représentation matricielle, soit par une représentation canonique.

### *Exemples de représentations.*

Extensive (terme par terme) :

Fréquences	$\downarrow$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	.....
Intensités		$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	.....

Matricielle (sous forme de tableau) :

$\downarrow$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_5$	$f_6$	$f_7$	.....
$g_1$	+	0	+	0	0	0	+	
$g_2$	0	+	0	0	0	+	0	
$g_3$	0	0	0	+	+	0	0	
.								
.								
.								

Canonique (sous forme de fonction) :

$$\begin{aligned} \sqrt{f} &= K.g \\ f &= \text{fréquence} \\ g &= \text{intensité} \\ K &= \text{coefficient} \end{aligned}$$

L'application peut aussi être indéterminée (Stochastique) et la représentation la plus commode est la matricielle qui donne les probabilités de transitions.



## MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

*Exemple :*

$\downarrow$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$\dots\dots\dots$
$g_1$	0,5	0	0,2	0	$\dots\dots\dots$
$g_2$	0	0,3	0,3	1	$\dots\dots\dots$
$g_3$	0,5	0,7	0,5	0	$\dots\dots\dots$

Ce tableau doit être interprété comme suit : pour chacune des valeurs  $f_i$  de  $f$  il y a une ou plusieurs valeurs correspondantes  $g_i$  des intensités définies par une probabilité. Exemple : à la fréquence  $f_2$  correspondent les deux intensités  $g_2$  et  $g_3$  avec les chances d'occurrence 30 % et 70 % respectivement.

D'autre part, chacun des deux ensembles  $F$  et  $G$  peut être muni d'une structure. C'est-à-dire de relations et de lois de composition internes.

Le temps  $t$  est considéré comme un ensemble totalement ordonné appliqué sur  $F$  ou sur  $G$ , sous forme lexicographique.

*Exemples :*

a)  $f_1 \quad f_2 \quad f_3 \quad \dots\dots$

$t = 1, 2, \dots\dots$

b)  $f_{0,5} \quad f_3 \quad f_{\sqrt{11}} \quad f_x \quad \dots\dots$

$t = 0,5; 3; \sqrt{11}; x; \dots$

c)

$$t = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} f_1 & f_1 & f_2 & f_1 & f_2 & f_2 & f_n & f_3 & \dots & \dots & \dots \\ \hline A & B & C & D & E & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline \Delta t & \Delta t & \Delta t & \Delta t & \Delta t & \Delta t & \Delta t & \Delta t & \dots & \dots & \dots \end{array} \right|$$

$\Delta t = \Delta t$

L'exemple c est le plus général car l'évolution continue est sectionnée en tranches d'épaisseur unique  $\Delta t$ , ce qui la transforme en discontinue, bien plus facile à isoler et à examiner au verre grossissant.

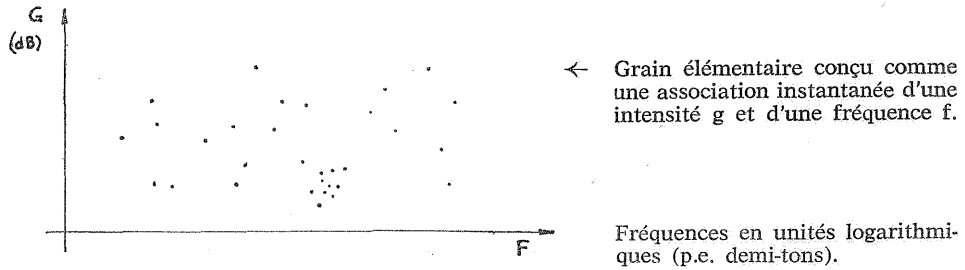
### Représentations graphiques

Nous pouvons assimiler les valeurs des fréquences pures à des points répartis sur un demi-axe d'abscisses et les valeurs d'intensité sur un demi-axe d'ordonnées.

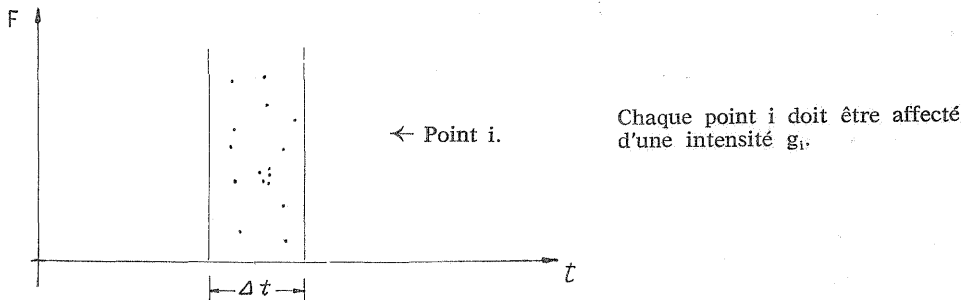
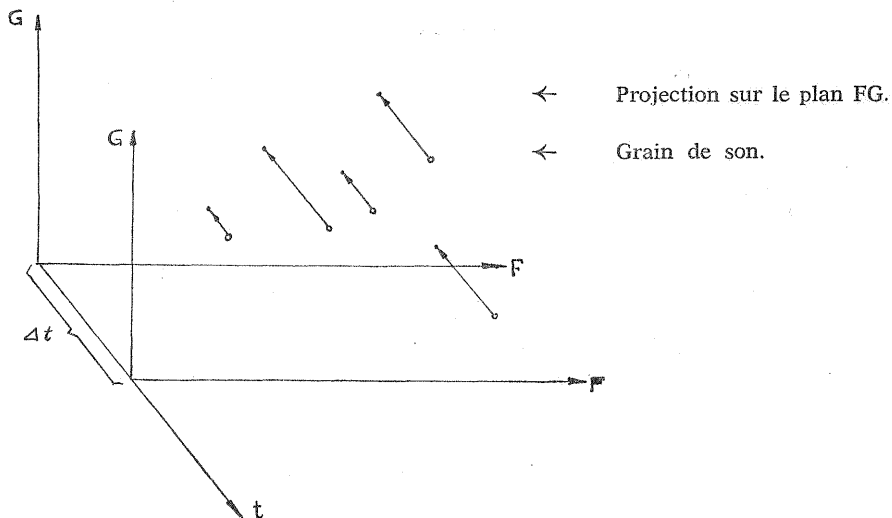
Les échelles des coordonnées seront logarithmiques.

En décibels pour les intensités, en octaves ou en demi-tons pour les fréquences.

## MUSIQUES FORMELLES



Ce nuage de points est la projection cylindrique sur le plan (FG), des grains contenus dans une tranche  $\Delta t$  assez courte.



Ces deux représentations graphiques rendent plus tangibles les possibilités abstraites évoquées jusqu'ici.

PSYCHOPHYSIOLOGIE

Nous sommes devant un nuage de points qui évolue. Ce nuage est le produit des deux ensembles F et G dans la tranche  $\Delta t$ . Quelles peuvent être les limites restrictives de la psychophysiologie humaine ?

Quelles sont les manipulations les plus générales, que l'on pourrait infliger aux nuages et à leurs transformations, dans les limites psychophysiologiques ?

L'hypothèse abstraite de base qui est la construction granulaire de tous les sons possibles donne un sens très profond aux deux questions précédentes. En effet dans les limites humaines et par des manipulations de toutes natures de ces nuages de grains, nous pouvons espérer produire non seulement les sons des instruments classiques, des corps élastiques et en général comme ceux utilisés avec prédilection par la musique concrète, mais aussi des ébranlements sonores avec des évolutions inouïes et inimaginables jusqu'ici. Des structures de timbres et des transformations assises sur des bases n'ayant aucun caractère commun avec ce que l'on connaît à ce jour.

Nous pouvons même émettre une supposition d'ordre plus général. Supposons que chacun des points de ces nuages représente non seulement une fréquence pure et son intensité satellite mais déjà une structure de grains élémentaires, ordonnée a priori. Nous pensons qu'une sonorité de deuxième ordre peut être créée de la sorte et même de troisième ordre, etc.

Des travaux récents sur l'audition ont donné des réponses satisfaisantes à certains problèmes de la perception.

Une série de problèmes de base qui nous concerne et que nous supposerons d'ailleurs résolue même si quelques-unes des solutions font défaut est la suivante [2, 3] :

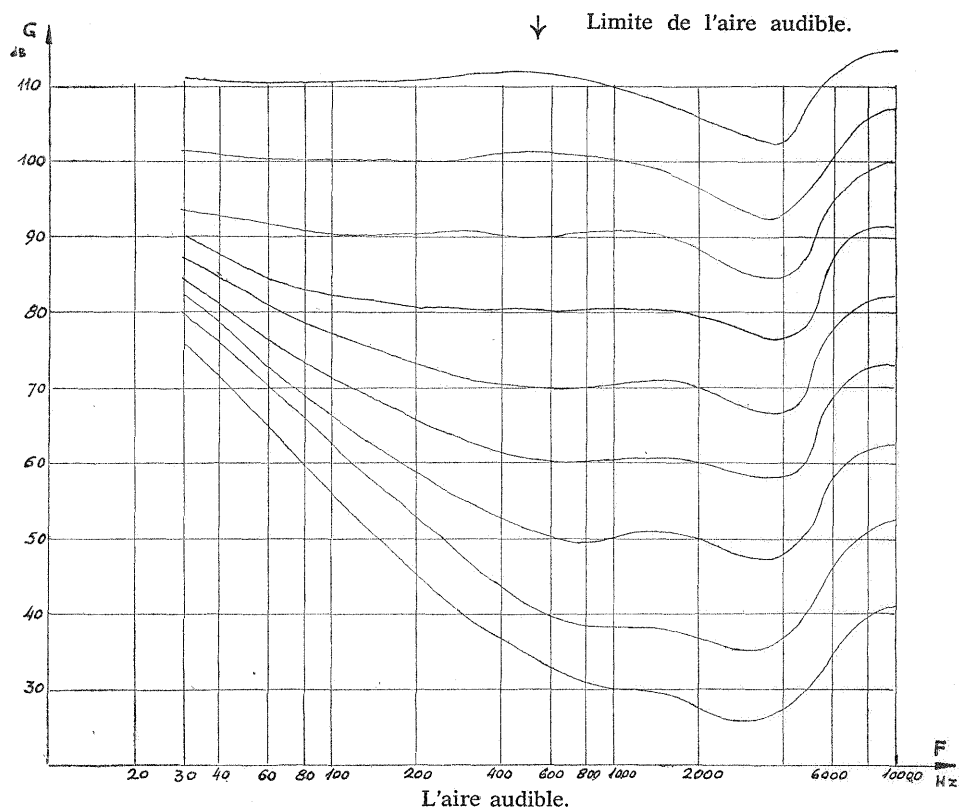
1° Quelle est la durée minimum perceptible (en tout confort) d'un son sinusoïdal en fonction de sa fréquence et de son intensité ?

2° Quelles sont les valeurs minima des intensités en décibels suivant les fréquences et suivant les durées minima des sons sinusoïdaux ?

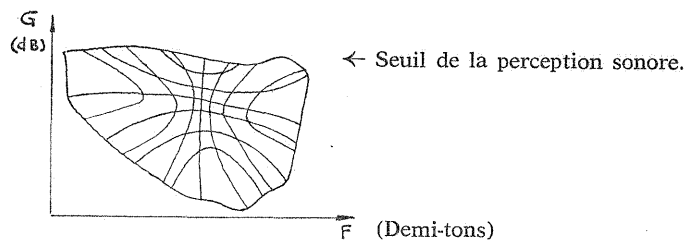
3° Quels sont les seuils d'intervalles mélodiques minima en fonction du registre, des intensités et des durées ?

Une bonne approximation est le diagramme de Fletcher-Munson, « Diagramme des courbes d'égale intensité sonore perçue ».

## MUSIQUES FORMELLES

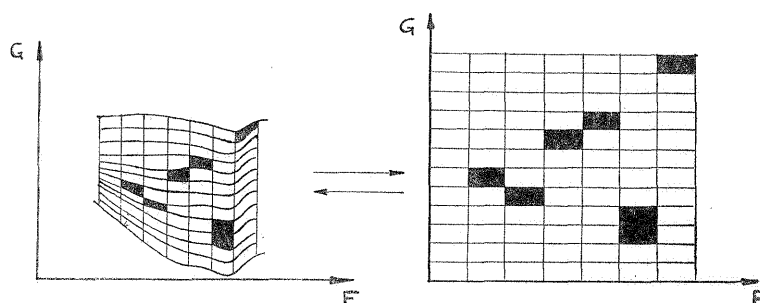


Et en résumé il existe le dénombrement des grains élémentaires audibles. Leur nombre total est de 340 000. L'oreille est plus sensible au centre de l'aire audible. Dans les extrémités elle perçoit moins les intervalles d'amplitude et les intervalles mélodiques. De sorte que si l'on voulait représenter par les deux coordonnées  $F$  et  $G$  l'aire audible mais de manière homogène, c'est-à-dire que chaque élément de surface  $\Delta F, \Delta G$  contienne la même densité de grains de sons perceptibles, nous obtiendrions une sorte de mappemonde.



## MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

Pour simplifier les raisonnements qui vont suivre sans les altérer, nous allons nous baser sur le diagramme de Fletcher et supposer qu'une transformation adéquate et biunivoque est appliquée à ce groupe de coordonnées qui transformera cet espace courbe en rectiligne ordinaire.



Tous les résultats expérimentaux précédents sont établis dans des conditions idéales et sans rapport avec la complexité réelle des sons naturels de l'orchestre et des corps élastiques en général, sans parler des sons plus complexes de l'industrie ou de la nature chaotique [4]. Théoriquement [5], un son complexe ne peut être représenté de façon exhaustive que par un diagramme tridimensionnel  $F, G, t$  donnant la fréquence instantanée et l'intensité instantanée en fonction du temps. Mais pratiquement cela revient à dire que pour l'établissement de la représentation d'un bruit instantané, par exemple d'un simple bruit d'échappement d'une voiture, il faudrait des mois de calculs et de graphiques. Ce problème qui est une impasse rappelle singulièrement l'aventure de la mécanique classique qui prétendait rendre compte de tous les phénomènes physiques et même biologiques à l'aide seulement de quelques formules et au bout d'un temps suffisamment long. Mais alors, pour décrire l'état à un instant  $t$  d'une masse gazeuse de volume très réduit, même en admettant des simplifications à l'origine des calculs, il aurait fallu plusieurs siècles de travail humain !

C'était un faux problème car inutile et en ce qui concerne la masse gazeuse, la théorie cinétique des gaz de Maxwell-Boltzmann avec sa méthode statistique a été d'une grande fécondité [6]. Cette méthode rétablissait la valeur des échelles d'observation. Pour un phénomène macroscopique c'est l'effet global massique qui compte, et chaque fois que l'on veut observer un phénomène, il faut d'abord établir le rapport des échelles observateur  $\leftrightarrow$  phénomène. Ainsi si l'on observe les amas galactiques, il faut décider si c'est le mouvement d'ensemble qui nous intéresse, si c'est le mouvement d'une seule étoile ou si c'est la constitution moléculaire d'une toute petite région sur une étoile.

## MUSIQUES FORMELLES

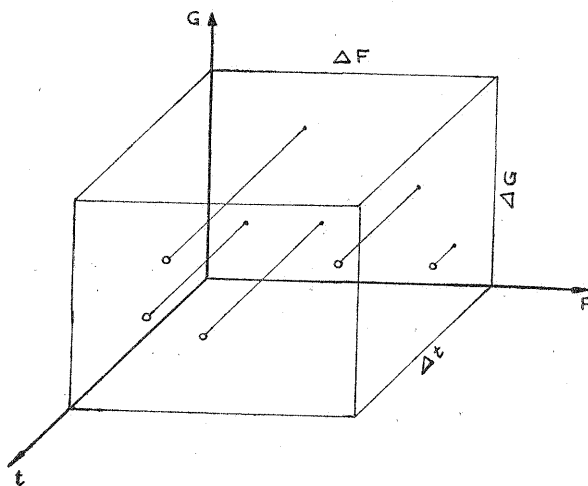
De même en est-il des sons complexes et même des sons suffisamment simples. Ce serait peine perdue que d'essayer de rendre compte analytiquement ou graphiquement des caractères des sons complexes en vue de les utiliser dans une composition électromagnétique. Pour la manipulation de ces sons des méthodes macroscopiques sont nécessaires.

Inversement et c'est ce qui nous intéresse en particulier, agir comme architectes sur la matière sonore pour construire des sons complexes et des évolutions de ces êtres, signifie qu'il faut utiliser des méthodes d'analyse et de construction macroscopiques. Les microsons, les grains élémentaires n'ont pas d'importance à l'échelle où nous nous plaçons. Seuls les groupes de grains et les caractéristiques de ces groupes ont un sens. Naturellement dans des cas tout particuliers, le grain unique sera rétabli dans sa gloire. Dans une chambre de Wilson c'est la particule élémentaire qui porte la physique théorique et expérimentale sur ses épaules et dans le soleil c'est l'ensemble des particules et leurs interractions denses qui font l'objet soleil.

Notre champ d'évolution est donc l'espace courbe invoqué précédemment mais simplifié en espace rectiligne à l'aide d'une transformation biunivoque adéquate qui sauvegarde la validité des raisonnements que nous allons poursuivre.

### TRAMES

La représentation graphique d'un nuage de grains dans une tranche de temps  $\Delta t$  examinée au début nous a apporté une notion nouvelle, celle de la densité des grains par unité de volume,  $\Delta F \cdot \Delta G \cdot \Delta t$ .



Plan de référence (FG) à l'instant  $t$ .

$\Delta D$  sera la dimension de la densité.

Tout son possible peut donc être découpé en une quantité précise d'éléments  $\Delta F \Delta G \Delta t \Delta D$  à quatre dimensions disposés dans cet espace suivant certaines règles définissant ce son, résumées par une fonction à quatre variables :  $s(F, G, D, t)$ .

L'échelle de la densité sera elle aussi logarithmique avec comme base un nombre qui peut être pris entre 2 et 3 (\*).

Pour simplifier l'exposé nous ferons abstraction de cette nouvelle coordonnée de densité. Elle sera toujours présente dans notre esprit mais comme un être associé à l'élément tridimensionnel  $\Delta F \Delta G \Delta t$ .

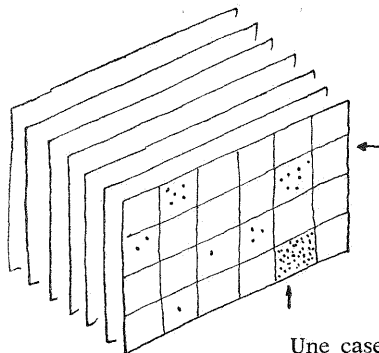
Si le temps est considéré comme un procédé d'ordonnance lexicographique, nous pouvons sans perte supposer les  $\Delta t$  égaux constants et suffisamment petits. Nous pouvons ainsi raisonner sur un espace à deux dimensions défini par les deux demi-axes F et G à condition de ne pas perdre de vue que le nuage des grains de sons existe dans l'épaisseur de temps  $\Delta t$  et qu'ils ne sont qu'artificiellement « plaqués » sur le plan (F G).

### Définition de la trame

La trame est l'aire audible (F, G) réglée par un quadrillage suffisamment dense et homogène tel qu'il a été défini en p. (7) et dont les cases sont, ou ne sont pas, occupées par des grains.

De cette manière un son quelconque et son histoire peuvent être décrits à l'aide d'un nombre suffisant de feuilles de papier comportant une trame donnée T. Ces feuilles seront placées dans un certain ordre lexicographique.

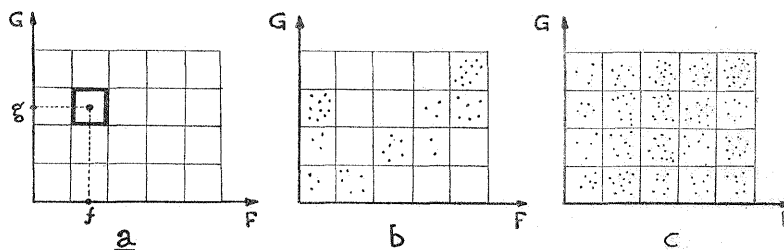
Un carnet de trames  
= la vie d'un son  
complexe.



(\*) Le choix de l'échelle logarithmique et de la base comprise entre 2 et 3 est fait pour fixer les idées. Toutefois, il correspond à des résultats des recherches de musique expérimentale réalisées par l'auteur; exemple : Diamorphoses, disque BAM Paris.

## MUSIQUES FORMELLES

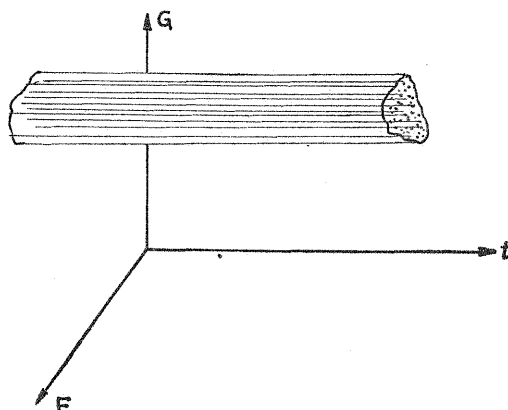
Les nuages de grains dessinés sur les trames différeront d'une trame à l'autre par leur position géographique (ou topologique) et par leur densité superficielle.



La trame a contient un petit rectangle élémentaire avec un petit nuage de densité  $d$  de fréquence moyenne  $f$  et d'amplitude moyenne  $g$ . C'est presque un son pur.

La trame b représente un son plus complexe avec graves et aigus dominants et médium faible. La trame c représente un bruit blanc de faible densité qui peut donc être perçu comme un chatolement sonore occupant toute l'aire audible.

Ce qui est capital dans toutes les constatations faites jusqu'ici, c'est que nul cas n'a été fait de la fixité géographique des grains sur les trames. En effet tous les sons naturels ou instrumentaux sont constitués par de petits éléments de surface remplis de grains qui fluctuent autour d'une fréquence et d'une intensité moyennes. De même pour la densité. Cette constatation est capitale et il est fort probable que l'échec des musiques électroniques dans la constitution de timbres nouveaux, mise à part l'insuffisance de la méthode sérielle, est dû en grande partie à la fixité des grains qui engendrent des structures en forme de paquets de spaghetti.

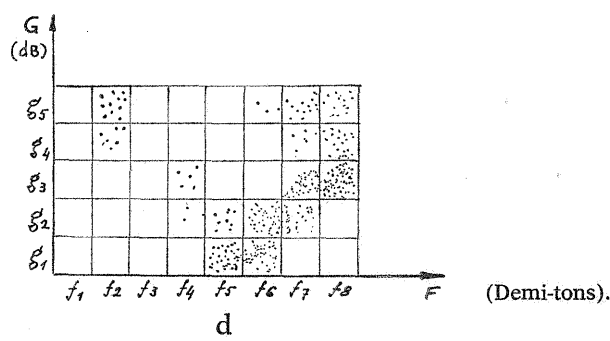




La fixité géographique des grains est un cas tout particulier, le cas le plus général étant la mobilité, la répartition statistique de grains autour de positions d'équilibre.

Par conséquent, en grande majorité, les sons actuels peuvent être décomposés en rectangles  $\Delta F.\Delta G$  suffisamment petits dont les positions géographiques et les densités varient d'une trame à l'autre suivant des lois bien ou peu définies. Par convention les grains des rectangles  $\Delta F.\Delta G$  y sont répartis au hasard, suivant une loi que nous allons définir.

Ainsi le son de l'exemple d à cet instant précis est constitué par la réunion des rectangles :



$(f_2g_1), (f_2g_5), (f_4g_2), (f_4g_3), (f_5g_1), (f_5g_2), (f_6g_1), (f_6g_2), (f_6g_5), (f_7g_2), (f_7g_3), (f_7g_4), (f_7g_5), (f_8g_3), (f_8g_4), (f_8g_5)$  et dans chacun des rectangles les grains sont disposés d'une manière dissymétrique et homogène.

### Construction des éléments $\Delta F.\Delta G$ des trames

#### 1° Par le calcul.

Nous allons examiner les moyens de calcul des éléments  $\Delta F.\Delta G.\Delta t.\Delta D$ .

Comment répartir les grains dans un volume élémentaire ? Si nous nous fixons la densité moyenne de grains (= nombre de grains par unités de volume) nous avons à résoudre un problème de probabilité dans l'espace à quatre dimensions. Une méthode plus simple serait de raisonner puis de calculer suivant les quatre coordonnées indépendamment.

Pour la coordonnée  $t$  la loi de répartition des grains sur l'axe des temps est :

$$(r) \quad P_x = e^{-cx}.dx \quad \text{ou encore,} \quad P_{x_1} = e^{-civ.c.\Delta x_1} \quad (\text{voir appendice 1})$$

## MUSIQUES FORMELLES

Pour les coordonnées G, F, D, la loi stochastique sera :

$$(r') \quad f(j)dj = \frac{2}{a} \left(1 - \frac{j}{a}\right) dj, \quad \text{ou encore :}$$

$$P_i = \frac{2}{2 \cdot 10^n} \left(1 - \frac{i}{2 \cdot 10^n - 1}\right) \quad (\text{voir appendice 1})$$

A partir de ces formules, nous pouvons former des tables de fréquences des valeurs t,G,F,D (voir problème analogue chap. I). Ces formules sont à notre sens, privilégiées, car elles découlent de raisonnements très simples, probablement les plus simples, et il est nécessaire de partir d'un nombre minimum d'énoncés et de contraintes si on veut s'en tenir au principe de la table rase (1<sup>re</sup> et 3<sup>e</sup> règles du Discours de la Méthode).

Soit un des volumes élémentaires  $\Delta t, \Delta D, \Delta F, \Delta G$  de la trame à l'instant t. A ce volume on attribue une densité D tirée de  $\Delta D$  suivant la table issue de la formule (r').

On définit des points sur  $\Delta t$  avec une densité linéaire  $D = c$  suivant la table définie par la formule (r).

A chaque point on attribue un grain sonore de fréquence f et d'intensité g tirées de l'intérieur du rectangle  $\Delta F, \Delta G$  à l'aide des tables issues de la formule (r').

Les correspondances se font soit graphiquement, soit à l'aide de tirages au sort successifs d'urnes composées suivant les tables précédentes.

### 2° Mécaniquement.

a) Au magnétophone: les grains sont réalisés à partir de sons sinusoïdaux dont la durée est constante, de 0,04 sec. environ. Ces grains doivent couvrir l'aire élémentaire  $\Delta F, \Delta G$  choisie. Le déroulement dans le temps est réalisé à l'aide du tableau des durées, pour une densité  $c = D$  minimum. Par mixage de tronçons de cette bande sur elle-même, nous pouvons obtenir des densités variant géométriquement avec comme raison 1,2,3... suivant le nombre de pistes (magnétophones) dont nous disposons.

b) Aux ordinateurs : les grains sont réalisés à partir de formes d'ondes dûment programmées suivant Gabor pour un ordinateur auquel on aura couplé un convertisseur analogique. Un deuxième programme fournirait la construction des volumes élémentaires  $\Delta t, \Delta D, \Delta F, \Delta G$ , à partir des formules (r) et (r').

PREMIÈRE REMARQUE GÉNÉRALE

Supposons une case  $\Delta F \Delta G \Delta t$ , qui quoique occupée d'une manière homogène par des grains de son, varie dans le temps en fluctuant autour d'une densité moyenne  $d_m$ . Nous pouvons appliquer un autre raisonnement plus synthétique et admettre que ces fluctuations dans le cas le plus général (si la portion de son est suffisamment longue) seront quelconques, donc obéiront aux lois du hasard. Dans ce cas, le problème est posé de la façon suivante :

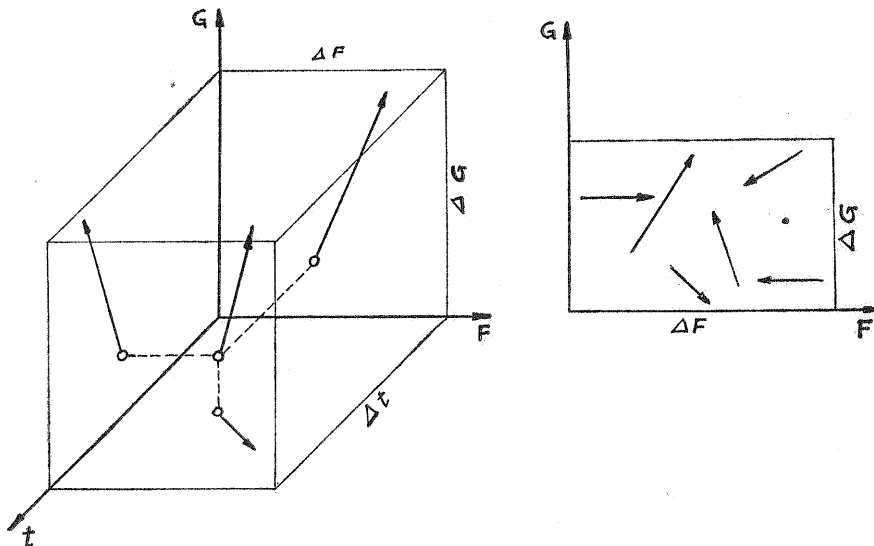
Etant donné un nuage prismatique de grains, de densité  $d_m$  de section  $\Delta F \Delta G$  et de longueur  $\Sigma \Delta t$ , quelle est la probabilité pour que  $d$  grains se trouvent dans un volume élémentaire  $\Delta F \Delta G \Delta t$  ? Si le nombre  $d_m$  est suffisamment faible, la probabilité est donnée par la formule de Poisson :

$$P_d = \frac{d_m^d}{d!} e^{-d_m}$$

Pour la définition de chaque grain, nous réutiliserons les méthodes exposées précédemment.

DEUXIÈME REMARQUE GÉNÉRALE (Espace Vectoriel) [8]

Nous pourrions aussi construire les cases élémentaires ( $\Delta F \Delta G$ ) des trames non plus avec des points mais avec des vecteurs élémentaires associés aux grains (Espace Vectoriel). En effet, la durée



moyenne de 0,04 sec par grain suppose un petit vecteur. Le cas particulier du grain se produit lorsque le vecteur est parallèle à l'axe du temps, alors sa projection sur le plan (F,G) est un point, et la fréquence du grain est constante. En général, les fréquences et les intensités des grains peuvent être variables et le grain, un glissando très court.

Dans un espace vectoriel (F,G) ainsi défini, la construction des trames serait peut-être alourdie, car il faudrait introduire la notion de vitesse et de répartition statistique de ses valeurs, mais l'intérêt de l'entreprise est énorme. Nous pourrions imaginer des trames à base de champs granulaires aimantés ou complètement neutres (désordonnés).

Dans le cas du désordre total, nous calculerons la probabilité  $f(v)$  d'existence d'un vecteur  $v$  dans le plan (F,G), à l'aide de la formule de Maxwell [11] rapportée à deux dimensions :

$$f(v) = \frac{2v}{\alpha^2} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} \quad \text{et pour la valeur moyenne} \quad v_1 \leq v_m \leq v_2$$

$$P(v_m) = \frac{2\sqrt{\pi}}{\alpha} \left\{ \theta(\lambda_1) - \theta(\lambda_2) \right\}$$

dans laquelle  $\lambda_i = \frac{v_i}{\alpha}$  et  $\theta(\lambda_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\lambda_i}^{+\lambda_i} e^{-\lambda^2} d\lambda$  pour  $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$   
(loi normale de Gauss). [12]

De toute manière, qu'il s'agisse d'un espace vectoriel ou d'un espace scalaire, les raisonnements ne sont pas modifiés dans l'ensemble. [13]

#### RÉSUMÉ DES TRAMES

a. Une trame est définie par un ensemble de nuages eux-mêmes ensemble de rectangles élémentaires  $\Delta F$ ,  $\Delta G$ , contenant ou non des grains de son.

Ceci à l'instant  $t$  dans une tranche de temps  $\Delta t$  aussi petite que l'on veut.

b. Les grains de sons forment une densité propre à chaque rectangle élémentaire  $\Delta F$ ,  $\Delta G$  et  $y$  sont généralement répartis ergodiquement (\*).

(\*) Ergodique (principe) : « l'effet capricieux d'une opération dépendant du hasard, se trouve régularisé de plus en plus par une répétition suffisante de cette opération ». Ici, il est sous-entendu que l'on considère une succession assez grande de trames. [14].

c. La conception du volume élémentaire  $\Delta F, \Delta G, \Delta t, \Delta D$  est telle qu'aucune *simultanéité* des grains n'est prévue en général. La simultanéité se présente lorsque la densité est suffisamment élevée. Sa fréquence est liée à la grandeur de la densité. Tout est question d'échelle et ce paragraphe se rapporte surtout à la réalisation. La dimension temporelle du grain (vecteur) étant de l'ordre de 0,04 sec. aucun chevauchement de deux grains (vecteurs) ne saurait être admis lors de la réalisation de la densité élémentaire par exemple :  $D_0 = 1,5$  grains/sec. Et comme la distribution superficielle des grains est homogène seul le hasard peut créer ce chevauchement.

d. A la limite une trame peut ne contenir qu'un seul son pur (sinusoïdal), et même aucun son du tout (trame vide).

## OPERATIONS ELEMENTAIRES SUR LES TRAMES

### (Algèbre)

Soit un son complexe. A un instant  $t$  de sa vie et durant une épaisseur  $\Delta t$  il pourra être représenté par un ou plusieurs nuages de grains ou de (vecteurs) sur le plan (FG). C'est la définition que nous avons donnée de la trame. La réunion de plusieurs de ces trames dans un ordre donné, décrit ou prescrit la vie de ce complexe sonore. Il serait intéressant d'envisager dans toute sa généralité la manière de combiner, de juxtaposer des trames pour décrire et surtout pour fabriquer des évolutions sonores, continues ou discontinues en vue d'en jouer dans une composition.

A cet effet nous allons emprunter des terminologies et des symboles de l'algèbre moderne, mais d'une manière élémentaire et à titre d'introduction à un développement ultérieur que nous ne saurions entreprendre pour l'instant.

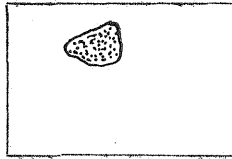
*Remarque :* Il est égal de se placer au niveau du phénomène physique ou au niveau de la perception. Au niveau de la perception nous comptons arithmétiquement ce qui, au niveau physique, est géométrique. Ceci peut s'exprimer d'une façon plus rigoureuse. La perception constitue un groupe additif, « presque » isomorphe de l'excitation physique qui est un groupe multiplicatif. Le « presque » est nécessaire pour conjurer les approximations.

Des grains (ou des vecteurs) du plan (F,G) constituent un nuage. Une trame peut être composée de nul ou de plusieurs nuages de grains (vecteurs).

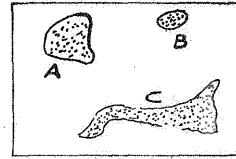
## MUSIQUES FORMELLES



Trame I.



Trame II.



Trame III.

Pour noter qu'un grain (vecteur)  $a$  appartient à un nuage  $E$  on écrit  $a \in E$  et la relation contraire s'écrit  $a \notin E$ .

Si tous les grains d'un nuage  $X$  sont grains d'un autre nuage  $Y$ , on dit que  $X$  est *inclus* dans  $Y$  ou encore que  $X$  est *partie* ou *sous-nuage* de  $Y$ . Cette relation est notée :

$$X \subset Y \text{ (inclusion).}$$

En conséquence nous aurons les propriétés suivantes :

$$X \subset X \text{ quel que soit } X.$$

$$X \subset Y \text{ et } Y \subset Z \text{ entraînent } X \subset Z.$$

Lorsque  $X \subset Y$  et  $Y \subset X$ , les nuages  $X$  et  $Y$  sont constitués des mêmes grains, ils sont indiscernables et on écrit :

$$X = Y \text{ (égalité).}$$

Un nuage peut ne contenir qu'un seul grain.

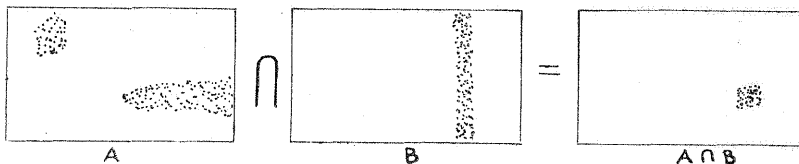
Un nuage  $X$  est dit *vide*, lorsqu'il ne contient aucun grain tel que  $a \in X$ . Le nuage vide se note  $\emptyset$ .

### OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

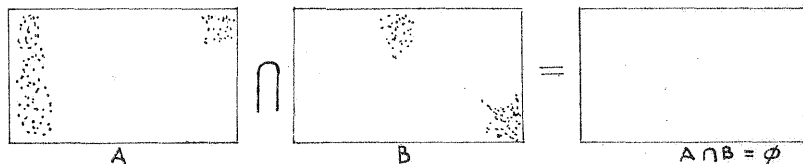
Ces opérations s'appliquent aussi bien aux nuages qu'aux trames

Nous pouvons donc utiliser indifféremment les notions « trame » ou « nuage », avec nuage ou grain « comme éléments constitutifs ».

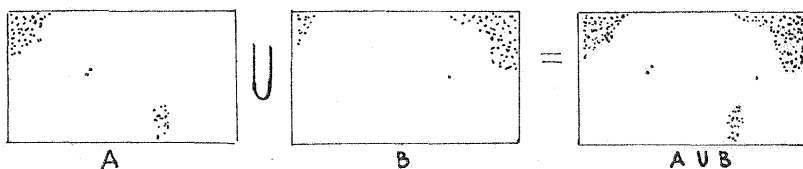
L'*intersection* de deux trames  $A$  et  $B$  est la trame des nuages qui appartiennent à  $A$  et à  $B$ . On la note  $A \cap B$  et cette notation se lit  $A$  inter  $B$ .



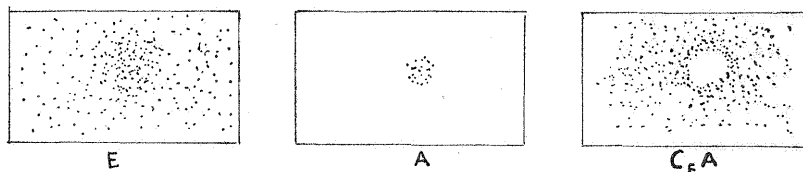
Lorsque  $A \cap B = \emptyset$ , on dit que A et B sont *disjoints*.



La *réunion* de deux trames A et B est l'ensemble des nuages qui appartiennent soit à A soit à B.

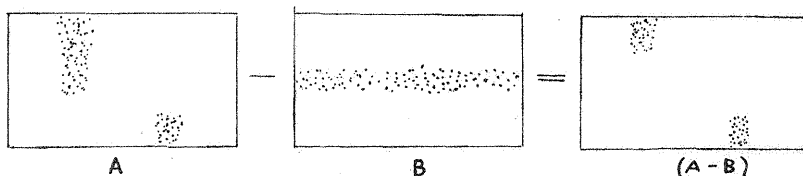


La *complémentaire* d'une trame A par rapport à une trame E contenant A est l'ensemble des nuages de E qui n'appartiennent pas à A. On la note  $C_A$  lorsqu'il n'y a pas de doute possible sur E.



La *différence*  $(A - B)$  de A et de B est l'ensemble des nuages de A qui n'appartiennent pas à B. Conséquence immédiate :

$$A - B = A - (A \cap B) = C_A (A \cap B).$$



Nous allons arrêter ici cet emprunt. Il permettra d'avoir une vue d'ensemble plus nette, plus confortable des manipulations et raisonnements qui vont suivre.

## MUSIQUES FORMELLES

### CARACTERES DISTINCTIFS DES TRAMES

Dans notre volonté de créer des complexes sonores à partir de la matière première du son, le son sinus (ou de ses remplaçants du type de Gabor), complexes sonores aussi riches que les sons naturels, plus inouïs que les sons naturels, avec des évolutions maîtrisées scientifiquement et sur des plans très généraux abstraits, nous avons implicitement reconnu l'importance de trois facteurs de base qui semblent pouvoir dominer *et* la construction théorique d'un processus sonore *et* son efficacité sensorielle :

- 1° La densité des événements élémentaires;
- 2° La situation géographique des événements sur les trames;
- 3° L'ordre ou le désordre des événements.

A première vue donc la densité des grains (vecteurs) leur topologie et leur quantité d'ordre sont les êtres indirects, les aspects, que nos oreilles macroscopiques percevront. Ce qui est admirable dans la nature des choses c'est que l'oreille et l'esprit suivent les réalités objectives et réagissent en direct malgré les grosses imperfections inhérentes ou culturelles. La mesure a été le fondement des sciences expérimentales. L'homme se traite volontiers d'invalides des sens et c'est pour cela et avec raison d'ailleurs qu'il s'est armé de machines indicatrices de mesures faites par d'autres machines. Pourtant il arrive avec ses oreilles, avec ses yeux, à mesurer des êtres ou des phénomènes physiques, mais transformés comme si un filtre déformant s'interposait entre la perception immédiate et sa conscience. Depuis environ un siècle la loi logarithmique des sensations a été découverte. Il semble que cette loi n'ait pas été contredite jusqu'ici. Mais comme la connaissance ne s'arrête jamais, la science de demain trouvera certainement non seulement un assouplissement, une finesse plus grande à cette loi mais encore un début d'explication au pourquoi de ce filtre déformant, si étonnant.

Cette transformation statistique quasi biunivoque de l'excitation en perception nous a permis jusqu'ici de raisonner sur des êtres physiques, les trames, tout en pensant « faits perçus ».

Une réciprocité de même nature, entre la perception et son intelligence nous permet de passer des trames, aux caractères donc de distinction.

Ainsi les raisonnements que nous allons poursuivre s'appliquent aussi bien à des notions pures qu'à des résultantes de la perception qui en sont les causes ou les conséquences sensibles suivant que nous prenons l'attitude de l'artisan ou celle de l'auditeur.



Nous avons déjà remarqué la Densité et la Topologie des grains et des cases et nous avons admis les notions d'Ordre et de Désordre dans la répartition homogène superficielle des grains.

Nous allons examiner de très près la notion d'ordre car c'est elle qui se cache probablement derrière les deux autres. C'est-à-dire que la densité et la topologie sont plutôt des incarnations palpables simplifiées de cette notion fuyante et multiforme du désordre.

Lorsque nous disons ordre ou désordre nous sous-entendons d'abord « d'objets », « d'éléments » puis, et c'est déjà plus complexe, nous définissons les « éléments » mêmes dont nous voulons étudier et construire l'ordre ou le désordre, leur échelle par rapport à la nôtre puis, nous qualifions et nous nous efforçons de mesurer cet ordre ou désordre.

Nous pouvons même dresser une liste de tous les ordres et désordres de ces êtres à toutes les échelles, de tous les aspects, de toutes les mesures et même les caractères d'ordre ou de désordre de cette liste et à nouveau établir les aspects et les mesures.

D'après l'exemple précité des gaz si nous nous plaçons à l'échelle moléculaire (nous aurions pu descendre au niveau atomique etc...), les valeurs absolues des vitesses, leurs directions et répartitions dans l'espace, sont de toutes sortes. Et nous pouvons distinguer les « éléments » porteurs d'ordre ou de désordre. Ainsi si en théorie nous pouvions isoler l'élément « directions » et supposer qu'il est astreint à suivre certaines directions privilégiées et non pas toutes, nous imposerions un certain degré d'ordre et ceci indépendamment des autres éléments qui constituent la notion gaz. De même dans un temps suffisamment long les valeurs des vitesses d'une seule molécule se distribuent autour d'une valeur moyenne avec des écarts plus ou moins grands qui suivent la loi de Gauss. Là nous avons un certain ordre puisque ces valeurs sont terriblement plus nombreuses, au voisinage de cette valeur moyenne, que toutes les autres extrêmes, jusqu'aux infiniment grandes ou infiniment petites.

Prenons un autre exemple plus sensible et aussi vrai. Une foule humaine de 500 000 personnes rassemblée sur la place d'une ville. Si nous examinons le déplacement d'ensemble de cette foule nous constatons qu'elle ne bouge pas. Pourtant chaque individu remue ses membres, sa tête, ses yeux etc., et déplace son centre de gravité de quelques centimètres dans toutes les directions. Si les valeurs des déplacements de son centre de gravité étaient très grandes la foule se désagrégerait dans une épouvante de hurlements en raison des chocs multiples des individus entre eux. Les valeurs donc statistiques de ces déplacements sont normalement situées entre des limites très faibles qui varient avec la densité de la foule.

## MUSIQUES FORMELLES

Du point de vue de ces valeurs à l'immobilité, le désordre est faible. Une autre caractéristique de cette foule serait l'orientation des visages. Si un orateur parle depuis un balcon avec un effet calmant, probablement 499 000 visages regarderont le balcon et 998 000 oreilles écouteront les paroles d'or. Un millier donc de visages et 2 000 oreilles seront distraites pour des raisons variables, fatigue, gêne, imagination, sexualisme, mépris, vol, etc. Nous pourrions affirmer avec toute la grande presse et sans contestation possible que la foule et l'orateur étaient absolument d'accord, mieux, que 500 001 personnes étaient unanimes. Le degré d'ordre que recherchait l'orateur atteignait un maximum tout au moins pendant quelques minutes et si l'unanimité s'est exprimée également à l'issue du meeting, l'orateur pourra être persuadé que les idées étaient aussi bien ordonnées dans sa tête que dans celles de la foule.

Nous constatons après ces deux exemples extrêmes que la notion d'ordre et de désordre est à la base d'un très grand nombre de phénomènes et même que la définition d'un phénomène ou d'un objet est très souvent tributaire de cette notion.

D'autre part, que cette notion est établie à partir de groupes précis et distincts d'éléments. Que l'échelle est importante dans le choix des éléments. Enfin, que la notion d'ordre ou de désordre implique le rapport des valeurs effectives sur toutes les valeurs possibles que peuvent prendre les éléments d'un groupe, ce qui introduit la notion de probabilité dans l'estimation quantitative de l'ordre ou du désordre.

Nous appellerons *variété* d'un groupe d'éléments le nombre d'éléments distincts.

Nous appellerons *entropie* d'un groupe d'éléments la quantité d'ordre ou de désordre définissable dans ce groupe. L'entropie est liée à la notion de variété et par-là même à la probabilité d'un élément du groupe. Ces notions sont celles de la théorie des communications qui elle-même fait un emprunt au deuxième principe de la thermodynamique. (Théorème H de Boltzmann) [15].

La variété s'exprime en nombre pur ou en son logarithme à base 2. Ainsi le sexe humain à deux éléments, femelle et mâle, sa variété est soit 2, soit 1 bit :

$$(1 \text{ bit} = \log_2 2).$$

Supposons un groupe de probabilités (groupe de nombres réels positifs  $p_i$  dont la somme est 1). L'entropie de ce groupe sera par définition :

$$H = -K \sum p_i \log p_i.$$

Si la base des logarithmes est 2 l'entropie s'exprime en bits.

Ainsi si nous avons une séquence de pile ou face les probabilités pour pile et pour face étant  $1/2$  l'entropie de cette séquence c'est-à-dire l'incertitude à chaque coup est de 1 bit. Si les deux faces étaient pile l'incertitude serait levée et l'entropie  $H$  serait zéro.

Conservons le pile et face et supposons que l'avènement de pile ou de face ne se fasse pas en lançant la pièce mais d'après une loi déterminée, univoque, (par exemple choisir à chaque coup pair : face, et à chaque impair : pile). L'incertitude, le désordre, est toujours absent et l'entropie  $H$  est zéro. Si la loi devient excessivement complexe l'apparition de pile ou de face semblera à un observateur humain régie par la loi du hasard, du désordre et l'incertitude sera rétablie. Ce que cet observateur pourra faire c'est, par exemple, compter les coups pile et face, chiffrer leurs fréquences respectives, en déduire les probabilités, puis calculer l'entropie en bits. Si la fréquence de pile est égale à celle de face l'incertitude sera maximum et égale à 1 bit.

Cet exemple typique montre en gros le passage de l'ordre au désordre et la façon de graduer ce désordre pour pouvoir le comparer avec d'autres. Il montre aussi l'importance de l'échelle. L'intelligence humaine d'un observateur assimilerait une complexité déterministe jusqu'à une certaine limite. Au-delà, la complexité à ses yeux, basculerait dans l'imprévisible, dans le hasard, le désordre et le visible (macroscopique) glisserait dans l'invisible (microscopique). D'autres méthodes, d'autres points de vue seront nécessaires pour observer et contrôler les phénomènes.

Au début de ce chapitre nous avons admis que l'esprit et surtout l'oreille étaient très sensibles à l'ordre ou au désordre des phénomènes. Les lois perceptives et de jugement sont probablement en rapports géométriques (logarithmiques) avec les lois excitatrices. Nous n'en savons pas grand-chose, et à nouveau nous nous bornerons à examiner des êtres généraux et à tracer une orientation d'ensemble des processus poétiques d'une musique très générale, sans pouvoir donner des chiffres, des modules, des déterminismes. Nous sommes encore assez optimistes pour penser que, l'expérience, l'action, solidaires des hypothèses abstraites, peuvent trancher dans le vif, biologiquement, le conflit entre l'ignorance et la réalité.

#### ETUDE DE L'ATAXIE (ordre ou désordre) AU NIVEAU D'UN NUAGE DE GRAINS (vecteurs)

*Axe des temps* : Le degré de l'ataxie, l'entropie, est fonction de la simultanéité des grains et du nombre d'intervalles distincts de temps entre l'émission de chaque grain. En effet si la *variété* des durées entre

## MUSIQUES FORMELLES

les émissions est faible, l'entropie est, elle aussi, faible. Si par exemple dans un  $\Delta t$  donné chaque grain est émis à des intervalles de temps réguliers la variété temporelle sera 1 et l'entropie nulle. Le nuage aura une ataxie de degré nul, il sera absolument ordonné. Par contre, si dans une suite assez longue de  $\Delta t$  les grains sont émis suivant la loi  $P_x = \delta e^{-\delta x} dx$  le degré d'ataxie sera beaucoup plus grand. Enfin la limite de l'entropie est l'infini car nous pouvons imaginer toutes les valeurs possibles d'intervalles de temps avec une égale probabilité. Ainsi si la variété est  $n \rightarrow \infty$ ,

la probabilité pour chaque intervalle de temps est  $p_i = \frac{1}{n}$  et l'entropie :

$$H = -K \sum_{i=0}^n \cdot \log p_i$$

$$H = -K \sum_{i=0}^n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -K n \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} = -K \log \frac{1}{n} = K \log n$$

et pour  $n \rightarrow \infty$ ,  $H \rightarrow \infty$ .

Ceci est moins vrai en pratique car un  $\Delta t$  ne présentera jamais une trop grande variété de durées et son entropie sera relativement faible, de plus une composition sonore aura un nombre  $\Delta t$  qui dépassera difficilement le nombre 100 000, donc :

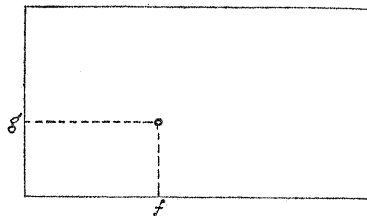
$$H \leq \log 100\,000 \text{ et } H \leq 16,6 \text{ bits.}$$

*Axe de fréquences (mélodique).* Les mêmes raisonnements y sont valables avec une plus grande restriction de la variété des intervalles mélodiques ou même des fréquences absolues en raison des frontières restreintes de l'aire audible.

L'entropie est nulle lorsque la variété des fréquences des grains est 1 c'est-à-dire lorsque le nuage ne contient qu'un seul son pur.

*Axes des intensités et des densités.* Les observations précédentes sont valables.

A la limite donc si les entropies suivant les trois axes d'un élément  $\Delta F, \Delta G, \Delta t, \Delta D$  sont nulles cet élément ne contiendra qu'un seul son pur d'intensité constante, émis à des intervalles réguliers.



Un seul grain émis à intervalles de temps réguliers.

En conclusion un nuage peut ne contenir qu'un seul son pur émis à des intervalles de temps réguliers, et son entropie moyenne (moyenne arithmétique des trois entropies) est nulle. Il peut contenir des grains chaotiquement répartis, ataxie très grande, maximum, avec une entropie moyenne maximum (théoriquement  $\infty$ ).

Entre ces deux bornes les grains peuvent être répartis d'une infinité de manières avec des entropies moyennes comprises entre 0 et max. et pouvant reproduire par exemple la Marseillaise ou bien une série dodéca-phonique, etc.

### PARENTHESES

#### OBSERVATIONS GÉNÉRALES SUR L'ATAXIE

En prenant appui sur cette dernière éventualité, nous allons examiner les processus très généraux des formes dans tous les domaines de la pensée, dans toutes les réalités physiques et psychiques.

A cet effet nous imaginons une « Chose Première ». Cette « Chose Première » sera plastique à volonté, déformable instantanément, progressivement ou par à-coups, extensible ou rétractable, unique ou plurale, aussi simple qu'un électron (!) ou aussi complexe que l'Univers (par rapport à l'homme, s'entend).

Elle aura une Entropie Générale Moyenne donnée. A une époque définie nous lui faisons subir une transformation. Du point de vue ataxique cette transformation peut avoir trois effets :

- 1° Le degré de complexité (la variété) n'a pas changé, la transformation est neutre et l'Entropie Globale n'a pas varié;
- 2° Le degré de complexité a augmenté, l'Entropie aussi;
- 3° La transformation était simplificatrice, l'Entropie a diminué.

Ainsi la transformation neutre peut agir et transformer :

- I — Le désordre parfait en désordre parfait (fluctuations).
- II — Le désordre partiel en désordre partiel.
- III — L'ordre parfait en ordre parfait.

La transformation multiplicatrice transforme :

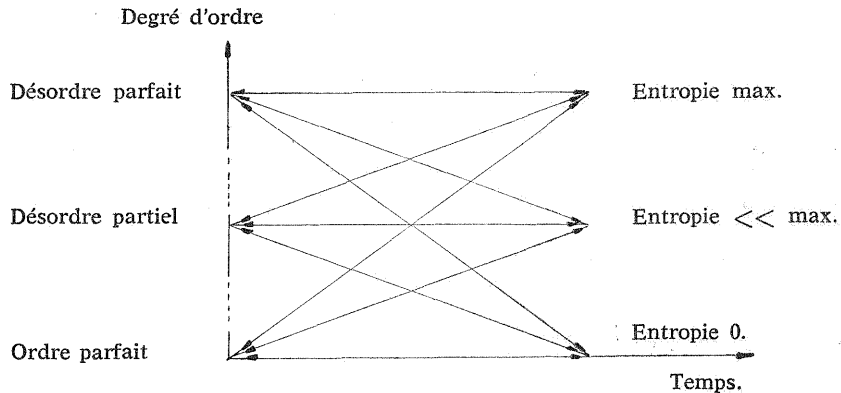
- I — Le désordre partiel en désordre parfait.
- II — Le désordre partiel en désordre plus grand.
- III — L'ordre parfait en désordre partiel.

Et la transformation simplificatrice transforme :

- I — Le désordre parfait en désordre partiel.
- II — L'ordre partiel en ordre plus grand.
- III — L'ordre partiel en ordre parfait.

## MUSIQUES FORMELLES

Et sous forme de diagramme cinématique nous aurons :



### ETUDE DE L'ATAXIE AU NIVEAU DES TRAMES (ensemble de nuages)

D'après ce qui précède, une trame qui est constituée par un ensemble de cases  $\Delta F, \Delta G$  associées à des densités pendant une tranche de temps  $\Delta t$ , peut être dissociée suivant les deux caractères des grains, la fréquence et l'amplitude et affectée d'une entropie moyenne. Ainsi nous pouvons classer les trames suivant le critère de l'ataxie à l'aide de deux paramètres de désordre : la variété des fréquences, et la variété des intensités. Nous ferons abstraction de la répartition temporelle des grains dans  $\Delta t$  ainsi que de la densité qui d'ailleurs est implicitement liée aux variétés des deux grandeurs fondamentales du grain.





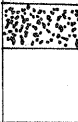



Nous symbolisons :

- Le désordre parfait par  $\infty$ ;
- Le désordre partiel par  $n$  ou  $m$ ;
- L'ordre partiel par  $n$  ou  $m$ ;
- L'ordre parfait par  $0$ .

Du point de vue ataxique une trame est formulée par un couple de valeurs de l'entropie attribué dans le même ordre au couple des fréquences et des intensités de ses grains. Ainsi le couple  $(n \infty)$  signifie : trame dont les fréquences ont une entropie assez faible (désordre ou ordre partiel) et dont les intensités ont une entropie maximum (désordre matériellement parfait).

Nous pouvons construire un tableau entropique des trames :

Tableau entropique des trames

Désordre parfait		Désordre partiel		Ordre parfait		Symbole	Observations	Schémas	Schémas
F	G	F	G	F	G				
F	G					$\infty . \infty$	trame unique		
F			G			$\infty . n$	infinité de trames		
F					G	$\infty . 0$	trame unique		
	G	F				$n . \infty$	infinité de trames		
	G			F		$0 . \infty$	trame unique sons purs		
		F	G			$n . m$	infinité de trames		
		F			G	$n . 0$	infinité de trames	—	.....
			G	F		$0 . n$	infinité de trames		:
				F	G	$0 . 0$	trame unique (son pur)	.	.

## CONSTRUCTION DES TRAMES

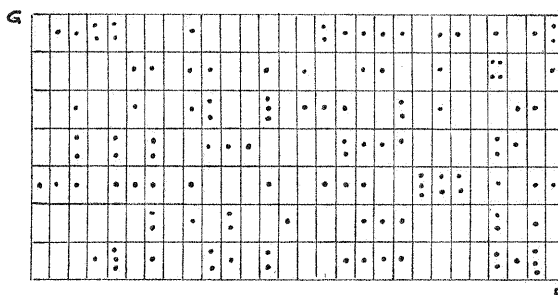
Nous allons passer rapidement en revue quelques-unes des trames du tableau précédent.

*Trame*  $(\infty, \infty)$ . Soit un très grand nombre de grains répartis au hasard sur toute l'étendue de l'aire audible et durant un intervalle de temps égal à  $\Delta t$ . Soit aussi une grille assez fine de manière que la densité moyenne de grains par case ne dépasse pas le nombre 30. La loi de répartition est alors donnée par la formule de Poisson :

$$P_k = \frac{(d_m)^k}{K!} e^{-d_m}$$

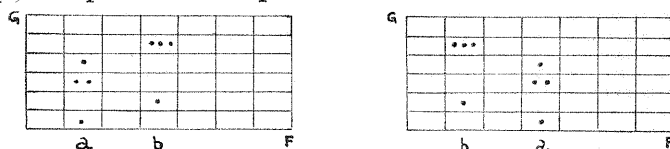
où  $d_m$  est la densité moyenne et  $P_k$  la probabilité pour qu'il y ait  $k$  grains dans une case considérée. Si  $d_m$  augmente au-dessus de 30 environ alors la loi de répartition devient *normale*.

Voici un exemple de répartition poissonnienne pour  $d_m = 0,6$  grains par case en moyenne, dans une grille de 196 cases, d'une trame  $(\infty, \infty)$  :



Ainsi pouvons-nous construire des trames  $(\infty, \infty)$ , soit à la main par des répartitions suivant les lignes et les colonnes, soit par des programmations adéquates sur ordinateurs. Pour une densité moyenne très élevée, ces trames dont le désordre est parfait (maximum) en s'engénçant donneront un son très riche, voisin du son blanc, jamais identique dans le temps. Si on calcule à la main et pour éviter l'élaboration et les calculs numériques de chaque trame  $(\infty, \infty)$  nous pouvons à partir déjà de la première trame  $(\infty, \infty)$  en construire un grand nombre. A cet effet nous permuterons les cases par colonnes ou par lignes.

Exemple de permutation par colonnes :



*Discussion.* Il est évident que pour une densité moyenne élevée, plus

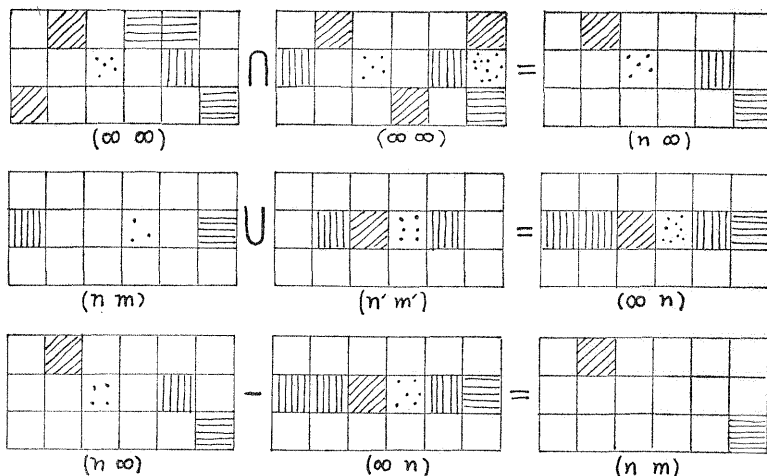


le nombre de cases est grand, plus la répartition des grains dans une région de la trame tend à se régulariser (ergodisme) et les fluctuations d'une case (nuage) à l'autre sont faibles. Mais les limites absolues de la densité des cases de l'aire audible seront fonction des moyens techniques disponibles, règles à calculs, tables, machines à calculer, ordinateurs, papiers réglés, instruments d'orchestre, magnétophone, ciseaux, impulsions programmées de sons purs, découpages automatiques, enregistrements programmés, cerveaux électroniques, convertisseurs analogiques, etc.

Si chaque case est considérée comme un symbole défini par le nombre  $k$  de grains, l'entropie de cette trame (pour une finesse de grille donnée) sera naturellement affectée par la densité moyenne des grains par case et croîtra en même temps. C'est là que toute une série d'expériences statistiques sur des sujets devra circonscrire les limites perceptibles de l'ataxie de ces trames  $(\infty, \infty)$  et même exprimer les nuances colorées du son blanc. Il est fort possible que l'oreille classe dans le même tiroir de très nombreuses trames dont l'entropie varie fortement. Il en résulterait un appauvrissement, une simplification de la correspondance, information physique  $\rightarrow$  perception mais on aurait au moins l'avantage de diminuer considérablement le travail de fabrication des trames.

*Toutes trames.* A partir de quelques trames et en appliquant les opérations élémentaires nous pouvons construire toutes les trames du tableau entropique.

Quelques exemples :



*Nota.* En pratique, les filtres des fréquences et des intensités imitent parfaitement ces opérations élémentaires.

# ENCHAINEMENTS DES TRAMES

Nous avons admis jusqu'ici qu'un son quelconque, qu'une musique quelconque, peut être décrite à l'aide d'un nombre suffisant de trames disposées dans l'ordre lexicographique des pages d'un livre. Si nous représentons chaque trame par un symbole spécifique (codage biunivoque), le son ou la musique pourraient être traduits par une succession de symboles nommée protocole :

a b g k a b.... bg....

chaque lettre identifiant des trames et des instants t pour des  $\Delta t$  isochrones.

Sans rechercher les causes de telle ou telle succession de trames c'est-à-dire sans entrer ni dans la structure physique des sons ni dans la structure logique de la composition, nous pouvons dégager certains modes de succession, certaines espèces de protocoles. Nous renvoyons aux ouvrages spécialisés sur la question [16]. Ici nous allons passer rapidement en revue les définitions élémentaires.

Une chose quelconque, ou son symbole unique, est appelé *terme*. Deux termes successifs matérialisent une *transition*. Le deuxième terme s'appelle le *transformé* et le changement effectué est représenté par :

terme A  $\rightarrow$  terme B.

ou bien

A  $\rightarrow$  B

Une *transformation* est un groupe de transitions. Exemple tiré du protocole précédent :

↓ a b g k .....  
b g k a .....

Autre exemple :

↓ do ré la .....  
si sol mi .....

Autre exemple :

↓ 

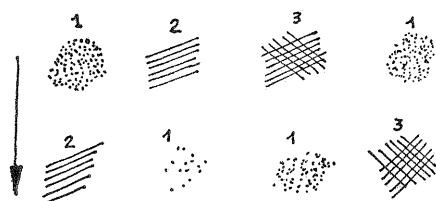
Une transformation est *close* lorsque le groupe des transformés ne contient que des éléments appartenant au groupe des termes.

Exemples :

l'alphabet : ↓ a b c ..... z  
b c d ..... a

↓ do réb ré mib mi fa solb sol la sib si  
ré solb sol do fa si la réb mib mi sib

## MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE



1° Nuage de sons ponctuels.  
ex. pizzicatti.

2° Réseau de glissandi parallèles  
à une direction.

3° Réseau de glissandi parallèles  
à deux directions.

avec une infinité de termes :

↓	1	2	3	4	5	6	.....
↓	6	7	4	100	1	2	.....

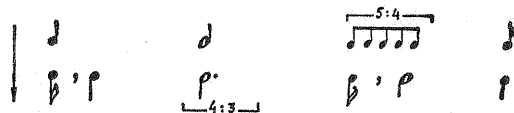
Une transformation est *univoque* lorsque chaque terme a un seul transformé.

Exemple :

↓	b	a	b	e	.....
↓	a	b	c	d	.....

Exemples de transformations non univoques :

↓	a	b	c	.....
↓	b,c	d	m,n,p,	.....



Changement du timbre d'un groupe de valeurs :

Timbres	↓	clarinettes	hautbois	cordes	timbales	cuivres
	↓	timbales	timbales	cuivres	hautbois	cordes
	↓	cordes	basson			hautbois

Caractériologie de musique concrète [4,5] :

« Allure »	↓	nulle	vibrée	tremblée	cyclique	irrégulière
	↓	cyclique ou	irrégulière	nulle ou	tremblée	nulle ou
	↓	tremblée		irrégulière		vibrée ou
						cyclique

Une transformation est *biunivoque* lorsque chaque terme a un seul transformé et lorsque chaque transformé est issu d'un seul terme.

Exemple :

↓	a	b	c	d	.....
↓	b	a	d	c	.....

# MUSIQUES FORMELLES

*Représentation matricielle.* Une transformation :

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad a \quad b \quad c \\ \vee \quad a \quad c \quad c \end{array}$$

peut être représentée par un tableau comme suit :

$$\begin{array}{c|ccc} \downarrow & a & b & c \\ \hline a & + & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & + & + \end{array}$$

ou encore

$$\begin{array}{c|ccc} \downarrow & a & b & c \\ \hline a & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Ce tableau est une matrice des transitions du groupe des termes au groupe des transformés.

*Produit :* Soit deux transformations T et U :

$$T: \begin{array}{c} \downarrow \quad a \quad b \quad c \quad d \\ \vee \quad b \quad d \quad a \quad b \end{array}$$

et

$$U: \begin{array}{c} \downarrow \quad a \quad b \quad c \quad d \\ \vee \quad d \quad c \quad d \quad b \end{array}$$

Dans certains cas nous pouvons appliquer à un terme n de T une transformation T puis une transformation U. Ceci s'écrit :  $U[T(n)]$ , et est le produit des deux transformations T et U à condition que les transformés de T soient des termes de U. Ainsi, d'abord  $T: a \rightarrow b$  puis  $U: b \rightarrow c$  et en résumé  $V = U.T: a \rightarrow c$ .

Pour calculer le produit appliqué à tous les termes de T nous utiliserons la représentation matricielle :

$$T: \begin{array}{c|cccc} \downarrow & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & 1 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

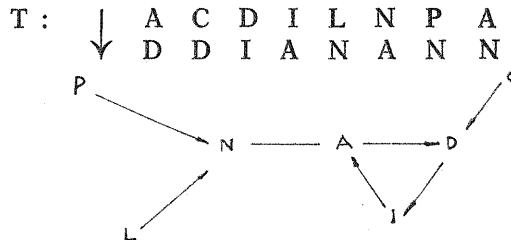
$$U: \begin{array}{c|cccc} \downarrow & a & b & c & d \\ \hline a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

et la transformation totale V est égale au produit des deux matrices T et U dans l'ordre U, T.

$$\begin{array}{c|cccc} & U & & T & & V \\ \hline \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} & \times & \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} & = & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \end{array}$$

Le *diagramme cinématique* est une expression graphique de la transformation. Pour le former on relie chaque terme à son transformé avec une flèche vers le transformé. Le *point représentatif* d'un diagramme cinématique est un point imaginaire qui se déplace par bonds de terme à terme en suivant les flèches du diagramme :

Exemple :



Une transformation est en réalité un mécanisme et théoriquement tous les mécanismes de l'univers physiques ou biologiques peuvent être représentés par des transformations sous cinq conditions de correspondance :

- 1° Chaque état du mécanisme (la continuité est décomposée en états discrets aussi rapprochés qu'on le désire) correspond bi-univoquement à un terme de la transformation;
- 2° Chaque suite d'états traversés par le mécanisme en raison de sa structure interne, correspond à une suite ininterrompue des termes de la transformation;
- 3° Si le mécanisme atteint un état et y demeure (état d'équilibre) le terme qui correspond à cet état n'a pas de transformé;
- 4° Si les états d'un mécanisme se reproduisent de la même manière sans fin, la transformation a un diagramme cinématique en circuit fermé;
- 5° Un arrêt du mécanisme et sa remise en route à partir d'un état quelconque, représentent dans le diagramme un déplacement du point représentatif dû non pas à une flèche mais à une action arbitraire sur le papier.

Le mécanisme est déterminé lorsque la transformation correspondante est univoque et close.

Le mécanisme est non déterminé lorsque la transformation correspondante n'est pas univoque. Dans ce cas la transformation est dite *stochastique*. Dans un mécanisme stochastique il faut remplacer dans la matrice de la transformation les nombres 0 et 1 par des fréquences relatives. Ce sont les probabilités d'alternative de telle ou telle transformation. Et le mécanisme déterminé n'est qu'un cas particulier du mécanisme stochastique, dans lequel les probabilités de transition sont 0 et 1.

## MUSIQUES FORMELLES

Exemple : Toutes les règles harmoniques ou polyphoniques de la musique classique pourraient se représenter par des mécanismes et la fugue est un des mécanismes les plus achevés et les plus déterminés. On peut même généraliser et dire que le compositeur d'avant-garde ne se contente pas de suivre les mécanismes de son époque mais d'en proposer de nouveaux, *et* dans le détail *et* dans la forme générale.

Si dans un temps suffisamment long, ces probabilités sont constantes et si elles sont indépendantes des états à l'origine, la suite stochastique s'appelle plus particulièrement *chaîne de Markov*.

Soit deux trames A et B et un protocole de 50 transitions.

ABABBBABAABABABABBBBABAABABBAABABBABAAAABABBAABBABBA

Les fréquences réelles des transitions sont :

A → B = 17 fois

A → A = 6 fois

23 fois

B → A = 17 fois

B → B = 10 fois

27 fois

Matrice des fréquences de transitions réelles :

↓	A	B
A	6	17
B	17	10

Matrice des probabilités (fréquences relatives) de transitions (MPT) :

↓	A	B
A	0,26	0,63
B	0,74	0,37
	1,00	1,00

Si la matrice précédente était ainsi :

↓	A	B
A	0,5	0,5
B	0,5	0,5

l'imprévisibilité de la succession de A et de B serait maximum et l'entropie aussi. Inversement, la contrainte serait nulle.

Si la matrice précédente était ainsi :

↓	A	B
A	0	1
B	1	0

La transformation serait absolument déterminée et l'entropie de la suite, nulle. La contrainte serait maxima.

Il se peut que les symboles d'un protocole dépendent des précédents d'une certaine manière. Exemple : protocoles digrammes, trigrammes, etc. Dans ce cas, la matrice des probabilités de transitions (MPT) peut être rendue indépendante à l'aide d'un codage approprié.

Nous pouvons avoir des (MPT) avec des paramètres. Exemple :

	↓	A	B		↓	A	B		↓	A	B
a)	A	0,26	0,63	b)	A	0,5	0,5	c)	A	1	0
	B	0,74	0,37		B	0,5	0,5		B	0	1

Les a, b, c, sont des paramètres.

Nous pouvons coupler deux ou plusieurs (MPT) de symboles différents à condition d'introduire une transformation déterminée ou stochastique entre les divers paramètres.

Ainsi un protocole de timbres peut être couplé à un protocole d'intensité et à un protocole de fréquences, etc. Et chacun des protocoles peut être couplé avec tous les autres par paires.

Des mécanismes isolés ou couplés peuvent avoir une ou plusieurs situations de stabilité, d'équilibre, vers lesquelles ils tendent de façon unique ou pas. Et le mécanisme stochastique est un tout fermé au même titre qu'un mécanisme déterminé.

Si une Matrice de Probabilités de Transition (MPT) a un état théorique d'équilibre, alors son protocole tend vers une proportionnalité des états, stable et homogène (ergodique) dans le temps. Cette proportion des symboles est l'état d'équilibre final. Dans la deuxième partie nous verrons, deux méthodes de calcul de cet état de stabilité d'une MPT ainsi que la définition d'une Entropie Moyenne. C'est à l'aide de cette Entropie moyenne que nous serons à même de définir puis de comparer les degrés d'ataxie de tel ou tel mécanisme que nous avons appliqué à une collection de trames.

De cette manière tout ce qui a été dit sur l'ataxie des grains, des nuages, peut être généralisé et transposé aux collections (carnets) de trames. Un critère fondamental de l'évolution d'une musique peut être formé par les transformations de l'ataxie dans le temps.

Par exemple : Il est très commun en composition musicale de ne pas livrer toutes les richesses possibles mais de les réserver et de les introduire peu à peu dans le temps. Il se peut aussi qu'on imagine une musique qui donne d'un coup, au départ, toute la variété, puis, qu'elle la monnaie dans le temps.

## MUSIQUES FORMELLES

Les évolutions élémentaires de l'ataxie peuvent être schématisées par les diagrammes suivants :

Taux d'ataxie.



Temps.

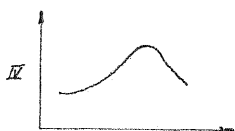
I. L'évolution est nulle.



II. Le taux de désordre, la richesse augmentent



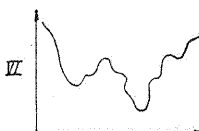
III. L'ataxie diminue.



IV. L'ataxie augmente puis diminue.



V. L'ataxie diminue puis augmente.



VI. L'évolution de l'ataxie est très complexe mais elle peut s'analyser par les trois premiers diagrammes.

Le diagramme VI peut être donné sous forme de protocole. L'ataxie donc peut être mise sous forme matricielle avec paramètres etc. et toutes les règles logiques des transformations qui ont été admises jusqu'ici sont applicables aux MPT de l'entropie.

Comment l'ataxie se perçoit-elle? De beaucoup de manières. Si les grains d'une surface donnée d'une trame sont répartis d'une manière homogène l'augmentation de la densité augmentera la richesse, l'imprévisibilité, l'entropie.

Dans la même répartition ergodique des grains, si certaines symétries dans la disposition des grains se manifestent et sont perceptibles, une contrainte est sentie d'où une diminution de l'entropie.

Dans la même répartition, si des liaisons mélodiques ou harmoniques sont effectuées et perçues l'imprévisibilité est diminuée, l'entropie aussi.

Ainsi après le premier déroulement d'une série de douze sons de la gamme tempérée l'imprévisibilité est tombée à zéro, la contrainte est maxima, le choix est nul et l'entropie aussi. La richesse, donc l'intérêt, se déplace sur d'autres terrains : des harmonies, des timbres, des durées, etc. et beaucoup d'astuces compositionnelles visent à ranimer l'entropie.

En fait, le discours sonore n'est qu'une perpétuelle fluctuation de l'entropie, sous toutes ses formes [17].



Pourtant la sensibilité humaine ne suit pas forcément la variation de l'entropie même si celle-ci est logarithmique à base appropriée. C'est plutôt une succession, un protocole de tensions et de détente à toutes sortes de degrés, qui animent l'auditeur souvent en sens inverse de l'entropie. Ainsi le Boléro de Ravel dont l'unique variation est la dynamique a une Entropie pratiquement nulle dès la troisième ou quatrième répétition de l'idée fondamentale. Pourtant l'intérêt ou plutôt l'agitation psychique croît avec le temps du fait justement de cette immobilité-banalité. Et toutes les musiques ou manifestations incantatoires visent à un effet de tension maximum avec une entropie minimum. L'inverse est également vrai, et vu sous un certain angle, le bruit blanc avec son maximum d'entropie est lassant très rapidement. Il semble qu'il n'y ait pas de correspondance esthétique  $\rightarrow$  entropie. Ces deux êtres sont liés à chaque occasion d'une manière assez indépendante. Cette constatation laisse encore quelque répit au libre arbitre du compositeur même si ce libre arbitre enfoui sous le fatras des acquis de la culture et de la civilisation n'est plus qu'une ombre, à tout le moins une tendance, un simple stochasme.

Le gros obstacle à une généralisation trop intempestive est surtout d'ordre logique, car un objet n'est objet qu'en fonction de sa définition, et il y a, surtout en art, une quasi-infinité de définitions donc une quasi-infinité d'entropies car la notion d'entropie est un épiphénomène d'une définition. Laquelle ou lesquelles sont valables? L'oreille, les yeux, puis le cerveau démêlent des situations parfois inextricables, avec ce qu'on appelle intuition, goût, intelligence, etc. Et deux définitions avec deux entropies différentes peuvent être perçues comme identiques. Mais il est vrai aussi que l'ensemble des définitions d'un objet a son propre degré de désordre.

Ce qui nous intéresse dans cet exposé n'est pas d'approfondir une situation si difficilement complexe et inexplorée mais simplement de faire un tour d'horizon sur les possibilités qu'offrent des domaines connexes de la pensée contemporaine, en vue d'agir, de chercher.

Pour conclure brièvement car les applications qui suivent sont plus éloquentes que des textes explicatifs, nous admettrons qu'une collection, qu'un carnet de trames peut être exprimé par des matrices de probabilités de transitions paramétrées. Elles sont affectées d'un degré d'ataxie, d'une entropie qui est calculable sous certaines conditions.

Pourtant, nous admettrons, pour rendre l'analyse, puis les synthèses d'une œuvre sonore, à portée de l'intelligence commune et de la règle à calcul, que nous discernons trois critères pour une trame.

#### 1° Critère topologique.

La position des cases  $\Delta F$ ,  $\Delta G$  sur l'aire audible est qualitativement

importante et une énumération de leurs combinaisons possibles est susceptible de créer un groupe de termes bien définis auxquels nous pourrions appliquer la notion de l'entropie et de son calcul;

2° *Critère de densité.*

La densité superficielle des grains d'une case  $\Delta F. \Delta G$  constitue aussi une qualité d'ailleurs immédiatement perceptible, et nous pourrions également définir des termes auxquels la notion et le calcul de l'entropie seraient applicables;

3° *Critère d'ataxie pure* (définie par rapport aux grains d'une trame).

Une case a trois variables : la fréquence moyenne, l'amplitude moyenne, et la densité moyenne des grains. Pour une trame nous pouvons donc établir trois protocoles indépendants ou liés, puis trois matrices de probabilités de transition couplées ou pas. Chacune des matrices aura son entropie et les trois matrices couplées auront une entropie moyenne. Dans le déroulement sonore nous pouvons établir plusieurs séries de trois matrices donc plusieurs séries d'entropies moyennes, leurs variations constituant le critère d'ataxie.

Les deux premiers critères qui sont généraux et à l'échelle soit des trames soit des cases, ne nous occuperont plus par la suite. Par contre, le troisième, plus conventionnel, sera repris en détail dans la deuxième partie de ce chapitre, celle des applications musicales qui ont donné une composition pour orchestre à cordes : « Analogique A », une composition pour sons sinusoïdaux : « Analogique B », réalisées en 1958/59.

## Applications

Dans cette partie des applications nous allons nous borner à titre d'exemple, à un cas simple dans lequel, chacune des composantes G, F, D, de la trame, ne prend que deux valeurs suivant des matrices de probabilités de transition que l'on couplera à l'aide de paramètres. D'ailleurs le choix des probabilités des matrices se fera de manière à n'avoir que le cas régulier conformément à la Théorie des événements en chaîne telle qu'elle est définie dans l'ouvrage de M. Maurice Fréchet [14].

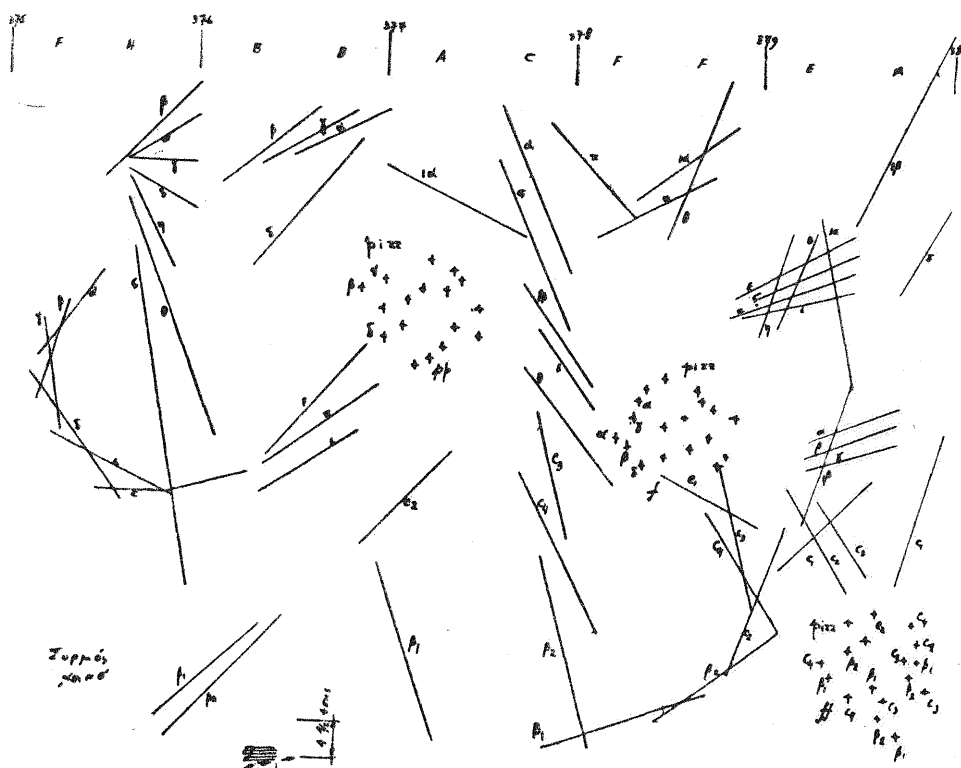
Il est évident que des mécanismes stochastiques plus riches et plus complexes sont hautement intéressants à construire et à mettre en œuvre, mais étant donné le volume considérable des calculs qu'ils nécessitent, il serait vain de les entreprendre à la main et par contre très souhaitable de les programmer et de les traiter à l'ordinateur.

Toutefois, malgré la simplicité structurelle de ce qui suivra, le mécanisme stochastique qui s'en dégagera sera un modèle, un type sous-jacent à tout autre bien plus complexe, et servira de catalyseur à des études ultérieures plus poussées. Car si ici nous nous bornons à l'étude des trames telles qu'elles ont été définies dans cette étude (ensembles de grains élémentaires) il va sans dire que rien n'empêche de généraliser cette méthode de structuration (composition) à des définitions d'êtres sonores de plus de trois dimensions. Ainsi, supposons non plus des trames mais des *critères* de définitions d'un être sonore tels que le timbre, le degré d'ordre, la densité, la variation etc. et même des *critères* de définition de structures élémentaires plus ou moins complexes.

## MUSIQUES FORMELLES

par exemple, des structures mélodiques et temporelles de groupes de sons (\*), des structures instrumentales, spatiales, cinématiques, etc. le même schème stochastique est adaptable à tous ces cas précités; il suffit de bien définir les variations et de pouvoir les classer même grossièrement.

Le résultat sonore ainsi obtenu n'est pas garanti a priori par le calcul. L'intuition et l'expérience devront toujours jouer leur fonction de guide, de décision et de test.



(\*) « Syrmos » pour 18 cordes, écrite en 1959, est fondée sur des transformations stochastiques de huit textures de base : a) Réseaux parallèles horizontaux ; b) Réseaux parallèles (glissandi) ascendants ; c) Réseaux parallèles (glissandi) descendants ; d) Réseaux parallèles croisés (ascendants et descendants) ; e) Nuages de pizzicati ; f) Atmosphères de frappés col legno avec des courts glissandi col legno ; g) Configurations géométriques de glissandi convergents ou divergents ; h) Configurations de glissandi traités en surfaces réglées gauches. La structure mathématique de cette œuvre est la même que celle de « Analogique A » et de « Analogique B » que nous allons étudier immédiatement.

## MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

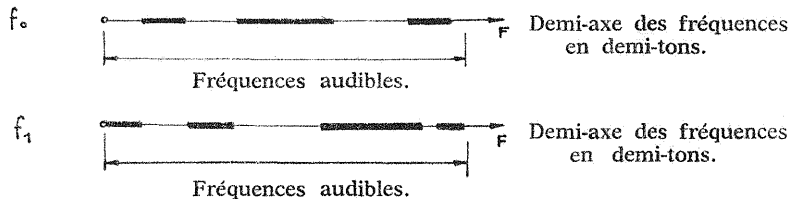
### ANALYSE (définition du schéma d'un mécanisme).

Nous allons définir le schéma d'un mécanisme « analogique » de processus stochastique. Il servira à la production d'êtres sonores et à leurs transformations dans le temps.

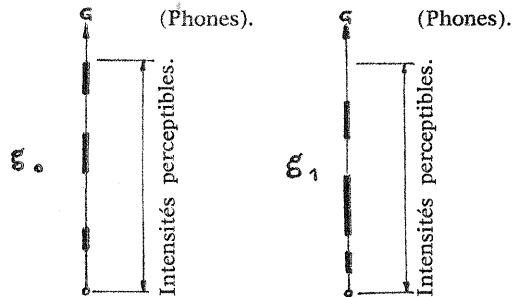
Ces êtres sonores auront des trames qui présenteront les traits suivants, choisis librement :

1° Elles comporteront deux combinaisons distinctes de plages de fréquences les  $f_0$ ,  $f_1$ .

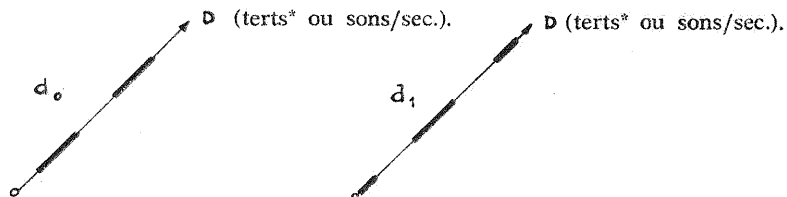
*Exemple :*



2° Elles comporteront deux combinaisons distinctes de plages d'intensités.



3° Elles comporteront deux combinaisons distinctes de plages de densités.



(\*) Logarithmes ternaires.

## MUSIQUES FORMELLES

4° Chacune de ces trois variables présentera un protocole pouvant être résumé par deux matrices de probabilités de transitions (MPT).

	↓	X	Y		↓	X	Y
(ρ)	X	0,2	0,8	(σ)	X	0,85	0,4
	Y	0,8	0,2		Y	0,15	0,6

Les lettres (ρ) et (σ) constituent les paramètres des MPT.

### MPTF (des fréquences)

	↓	f <sub>0</sub>	f <sub>1</sub>		↓	f <sub>0</sub>	f <sub>1</sub>
(α)	f <sub>0</sub>	0,2	0,8	(β)	f <sub>0</sub>	0,85	0,4
	f <sub>1</sub>	0,8	0,2		f <sub>1</sub>	0,15	0,6

### MPTG (des intensités)

	↓	g <sub>0</sub>	g <sub>1</sub>		↓	g <sub>0</sub>	g <sub>1</sub>
(γ)	g <sub>0</sub>	0,2	0,8	(ε)	g <sub>0</sub>	0,85	0,4
	g <sub>1</sub>	0,8	0,2		g <sub>1</sub>	0,15	0,6

### MPTD (des densités)

	↓	d <sub>0</sub>	d <sub>1</sub>		↓	d <sub>0</sub>	d <sub>1</sub>
(λ)	d <sub>0</sub>	0,2	0,8	(μ)	d <sub>0</sub>	0,85	0,4
	d <sub>1</sub>	0,8	0,2		d <sub>1</sub>	0,15	0,6

5° Les transitions des variables sont indéterminées à l'intérieur de chaque MPT (processus digrammes), mais par contre leurs MPT seront liées à l'aide d'un couplage déterminé des paramètres. Le couplage est donné par les transformations univoques suivantes :

(e <sub>0</sub> )	↓ f <sub>0</sub>	f <sub>1</sub>	↓ d <sub>0</sub>	d <sub>1</sub>	↓ g <sub>0</sub>	g <sub>1</sub>	↓ g <sub>0</sub>	g <sub>1</sub>	↓ f <sub>0</sub>	f <sub>1</sub>	↓ d <sub>0</sub>	d <sub>1</sub>
	λ	μ	↓ α	β	↓ λ	μ	↓ β	α	↓ γ	ε	↓ γ	ε

Par ces règles nous avons décrit la structure d'un mécanisme. Il est donc constitué par les trois paires des MPT (matrices des probabilités de transition), les MPTF, MPTG, MPTD et par le groupe (e<sub>0</sub>) des six couplages de ces MPT.

*Signification du couplage*

Soit  $f_0$  l'état des fréquences de la trame à un instant  $t$  de l'évolution sonore du mécanisme et durant une tranche de temps  $\Delta t$ . Soient aussi  $g_1$  et  $d_1$ , les valeurs des autres variables de la trame à l'instant  $t$ . A l'instant suivant  $t + \Delta t$ , le terme  $f_0$  devra en général changer car il obéit à l'une des deux MPTF, la ( $\alpha$ ) ou la ( $\beta$ ). Le choix de ( $\alpha$ ) ou de ( $\beta$ ) est conditionné par les valeurs  $g_1$  et  $d_1$  de l'instant  $t$ , conformément à la transformation univoque du couplage. Ainsi  $g_1$  propose le paramètre ( $\alpha$ ) et  $d_1$  le paramètre ( $\beta$ ) simultanément. Autrement dit le terme  $f_0$  devra demeurer  $f_0$  ou céder la place à  $f_1$  suivant le mécanisme ( $\alpha$ ) ou le mécanisme ( $\beta$ ). Tout se passe comme si le terme  $f_0$  se trouvait devant deux urnes ( $\alpha$ ) et ( $\beta$ ) avec des boules de deux couleurs, rouge pour  $f_0$  et bleue pour  $f_1$ , et dans les proportions suivantes :

Urne ( $\alpha$ )	Urne ( $\beta$ )
0,2 boules rouges ( $f_0$ )	0,85 boules rouges ( $f_0$ )
0,8 boules bleues ( $f_1$ )	0,15 boules bleues ( $f_1$ )

Le choix est libre et le terme  $f_0$  peut tirer son successeur soit de l'urne ( $\alpha$ ) soit de l'urne ( $\beta$ ) avec une probabilité égale à  $1/2$  (probabilités totales).

Une fois que l'urne aura été choisie, le tirage d'une boule bleue ou d'une boule rouge aura une probabilité égale à la proportion des couleurs dans l'urne choisie. Et en appliquant la règle des probabilités composées, la probabilité pour que  $f_0$  de l'instant  $t$  demeure  $f_0$  à l'instant  $t + \Delta t$  est  $1/2 (0,20 + 0,85) = 0,525$  et la probabilité pour qu'il change en  $f_1$  est  $1/2 (0,80 + 0,15) = 0,475$ .

Les cinq traits de constitution des trames ont établi un mécanisme stochastique. Ainsi dans chacune des tranches  $\Delta t$  de l'évolution sonore du mécanisme créé, les trois variables  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $d_i$ , poursuivent une ronde de combinaisons imprévisibles, toujours changeantes au gré des trois MPT et du couplage univoque qui relie termes et paramètres.

Nous avons fondé ce mécanisme sans prendre en considération encore aucun des critères des trames. C'est-à-dire, nous avons sous-entendu une distribution topologique des plages des grains lors du choix des  $f_0$ ,  $f_1$  et  $g_0$ ,  $g_1$ , mais sans préciser. De même pour la distribution des densités. Nous allons donner deux exemples de réalisations très différentes où ces deux critères seront effectifs. Mais avant de les exposer nous allons pousser l'étude du critère d'ataxie.

Nous négligerons les entropies des trois variables au niveau des grains car ce qui importe c'est le mécanisme macroscopique à l'échelle des trames.

## MUSIQUES FORMELLES

Maintenant nous allons poser la question fondamentale des mécanismes : « Où va la transformation résumée par une MPT? Quel est son destin? ».

Considérons la MPT :

↓	X	Y
X	0,2	0,8
Y	0,8	0,2

et supposons cent mécanismes identifiés par la loi de cette unique MPT. Nous les faisons tous partir sur X et les laissons évoluer librement. La question précédente devient :

« Y a-t-il une tendance générale des états des cent mécanismes et si oui, laquelle? » (voir appendice 2).

Après la première étape les 100 X se seront transformés en .

$$0,2.100 X = 20 X \text{ et } 0,8.100 Y = 80 Y.$$

A la troisième étape 0,2 des X resteront X et 0,8 des Y deviendront X. Par contre, 0,8 des X deviendront des Y et 0,2 des Y resteront des Y. Ce raisonnement général est valable à toutes les étapes et peut s'écrire :

$$\begin{aligned} X' &= 0,2 X + 0,8 Y \\ Y' &= 0,8 X + 0,2 Y. \end{aligned}$$

Si on veut l'appliquer aux 100 mécanismes X ci-dessus, nous aurons :

Etape	Mécanismes X	Mécanismes Y
0	100	0
1	20	80
2	68	32
3	39	61
4	57	43
5	46	54
6	52	48
7	49	51
8	50	50
9	50	50
.	.	.
.	.	.
.	.	.



## MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

Nous observerons des oscillations qui ont une tendance générale à l'« équilibre » qui s'effectue à la 8<sup>e</sup> étape. Nous pouvons donc conclure que sur les 100 mécanismes partis sur X la huitième étape enverra selon toutes probabilités 50 en X et 50 en Y.

Les mêmes « valeurs à l'équilibre » se calculent de la façon suivante :

À l'équilibre les valeurs des X et des Y restent inchangées et le système précédent devient :

$$\begin{aligned} X &= 0,2 X + 0,8 Y \\ Y &= 0,8 X + 0,2 Y \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} 0 &= -0,8 X + 0,8 Y \\ 0 &= +0,8 X - 0,8 Y \end{aligned}$$

et comme le nombre des mécanismes est constant, ici 100, une des deux équations peut être remplacée à l'équilibre par :

$$100 = X + Y$$

et le système devient :

$$\begin{aligned} 0 &= 0,8 X - 0,8 Y \\ 100 &= X + Y \end{aligned}$$

et les valeurs X, Y, à l'équilibre sont :

$$X = 50 \text{ et } Y = 50$$

soit en proportions :

$$X = 0,5, Y = 0,5$$

La même méthode peut être appliquée à la MPT ( $\sigma$ ) qui nous livrera un état à l'équilibre avec comme valeurs :

$$X = 0,73 \text{ et } Y = 0,27.$$

Une autre méthode particulièrement intéressante dans le cas d'une MPT à nombreux termes qui nous oblige, pour trouver les valeurs d'équilibre, à résoudre un long système d'équations linéaires, est celle qui utilise le calcul matriciel.

Ainsi la première étape peut être considérée comme résultante du produit matriciel de la MPT avec la matrice unicolonne  $\begin{vmatrix} 100 \\ 0 \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{l} X : \\ Y : \end{array} \begin{vmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 100 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 20 \\ 80 \end{vmatrix}$$

la deuxième étape :

$$\begin{vmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 20 \\ 80 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 + 64 \\ 16 + 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 68 \\ 32 \end{vmatrix}$$

## MUSIQUES FORMELLES

et la  $n^{\text{me}}$  étape :

$$\begin{vmatrix} 0,2 & 0,8 \\ 0,8 & 0,2 \end{vmatrix}^n \quad \begin{vmatrix} 100 \\ 0 \end{vmatrix}$$

A présent que nous savons calculer les valeurs à l'équilibre d'une chaîne de Markov nous pouvons facilement calculer son entropie moyenne.

La définition de l'entropie d'un système est :

$$H = - \sum p_i \log p_i.$$

Le calcul de l'entropie d'une MPT se fait d'abord par colonnes ( $\sum p_i = 1$ ) \* puis ce résultat est affecté d'un poids correspondant aux valeurs à l'équilibre. Ainsi pour la MPT ( $\sigma$ ) :

↓	X	Y
X	0,85	0,4
Y	0,15	0,6

Entropie des états de X :

$$- 0,85 \log 0,85 - 0,15 \log 0,15 = 0,611 \text{ bits.}$$

Entropie des états de Y :

$$- 0,4 \log 0,4 - 0,6 \log 0,6 = 0,970 \text{ bits.}$$

Valeur de X à l'équilibre :

$$0,73$$

Valeur de Y à l'équilibre :

$$0,27$$

Entropie moyenne à l'équilibre :

$$H\sigma = 0,611 \cdot 0,73 + 0,970 \cdot 0,27 = 0,707 \text{ bits}$$

Et l'entropie de la MPT ( $\sigma$ ) à l'équilibre :

$$H^{\sigma} = 0,722 \text{ bits}$$

(\*) Les  $p_i$  sont les probabilités de transition de la MPT.

Les deux entropies ne diffèrent pas de beaucoup et il fallait s'y attendre car si nous observons les MPT respectives nous remarquons que : les grands contrastes des probabilités intérieures à la matrice ( $\rho$ ), sont compensés par une égalité externe des probabilités à l'équilibre, par contre dans la MPT ( $\sigma$ ) la quasi égalité intérieure de 0,4 et de 0,6 arrive à combattre le contraste intérieur 0,85 et 0,15 et le contraste extérieur 0,73 et 0,27.

A ce niveau nous pouvons modifier les MPT des trois variables  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $d_i$ , de manière à obtenir une nouvelle paire d'entropies. Et cette opération étant renouvelable nous pouvons former un protocole de paires d'entropies et par conséquent une MPT des paires d'entropies. Ce sont des spéculations possibles et des recherches sans doute intéressantes.

Nous nous bornerons au premier calcul fait précédemment et nous poursuivrons l'investigation sur un plan encore plus général.

#### CHAÎNE MARKOVIENNE ÉTENDUE AUX $f_i$ , $g_i$ , $d_i$ , SIMULTANÉMENT

En page 3 nous avons analysé le mécanisme de la transformation de  $f_0$  en  $f_0$  ou en  $f_1$  lorsque les valeurs des deux autres variables  $g_i$  et  $d_i$  sont données. Nous pouvons appliquer les mêmes raisonnements pour chacune des trois variables  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $d_i$ , lorsque les deux autres sont données.

Exemple pour  $g_i$  :

Soit une trame à l'instant  $t$  dont les variables ont les valeurs ( $f_0, g_1, d_1$ ). A l'instant  $t + \Delta t$  la valeur de  $g_1$  se transformera en  $g_1$  ou en  $g_0$ .

De  $f_0$  vient le paramètre ( $\gamma$ ).

De  $d_1$  vient le paramètre ( $\epsilon$ ).

Avec la MPT ( $\gamma$ ) la probabilité pour que  $g_1$  demeure  $g_1$  est 0,2. Avec la MPT ( $\epsilon$ ) la probabilité pour que  $g_1$  demeure  $g_1$  est 0,6. En appliquant les règles des probabilités composées et totales comme en page 101 nous obtenons que la probabilité pour  $g_1$  de demeurer en  $g_1$  à l'instant  $t + \Delta t$  sous les effets simultanés de  $f_0$  et de  $d_1$  est égale à  $(0,2 + 0,6)1/2 = 0,4$ .

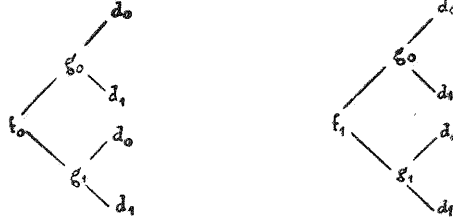
De même pour le calcul de la transformation de  $g_1$  en  $g_0$  et des transformations de  $d_1$ .

Nous tâcherons maintenant de sortir de cette forêt de combinaisons probabilistes, impossibles à manier et nous allons chercher une optique plus générale si elle existe.

En général, chaque trame étant constituée par une triade de valeurs des trois variables  $F$ ,  $G$ ,  $D$ , nous pouvons dénombrer les trames distinctes issues du mécanisme que nous nous sommes donné.

## MUSIQUES FORMELLES

Voici les combinaisons possibles :



ou encore :

$(f_0 g_0 d_0)$ ,  $(f_0 g_0 d_1)$ ,  $(f_0 g_1 d_0)$ ,  $(f_0 g_1 d_1)$ ,  $(f_1 g_0 d_0)$ ,  $(f_1 g_0 d_1)$ ,  $(f_1 g_1 d_0)$ ,  $(f_1 g_1 d_1)$ ;

soit huit trames distinctes.

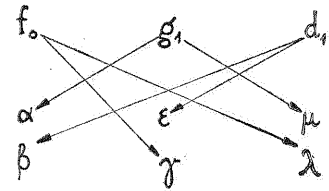
Ce sont ces huit trames qui composeront avec leurs protocoles, l'évolution sonore. A chaque instant  $t$  de la composition nous rencontrons une des huit trames précédentes et pas d'autres.

Quelles sont les règles de passage d'une combinaison à une autre? Peut-on construire une matrice de probabilités de transition de ces huit trames?

Soit la trame  $(f_0 g_1 d_1)$  de l'instant  $t$ . Peut-on calculer la probabilité pour que cette trame se transforme à l'instant  $t + \Delta t$  en  $(f_1 g_1 d_0)$ ?

Les opérations précédentes nous ont permis de calculer la probabilité pour que  $f_0$  se transforme en  $f_1$  sous l'influence de  $g_1$  et de  $d_1$ , et pour que  $g_1$  demeure en  $g_1$  sous l'influence de  $f_0$  et de  $d_1$ . Schématisons les opérations :

trame à l'instant  $t$  :



paramètres issus des transformations de couplage :

trame à l'instant $(t + \Delta t)$ :	$f_1$	$g_1$	$d_0$
Valeurs des probabilités tirées des MPT correspondantes aux paramètres des couplages :	0,80	0,6	0,4
Probabilités indépendantes :	0,15	0,2	0,8
Probabilités composées :	$0,475 \cdot 0,40 \cdot 0,60 = 0,114$		

Conclusion :

La trame  $(f_0g_1d_1)$  se transforme en  $(f_1g_1d_0)$  avec une probabilité 0,114.  
 Nous pouvons donc étendre le calcul aux huit trames et construire la matrice des probabilités de transition.

Elle sera carrée et aura huit lignes et huit colonnes.

M P T Z

	A ( $f_0g_0d_0$ )	B ( $f_0g_0d_1$ )	C ( $f_0g_1d_0$ )	D ( $f_0g_1d_1$ )	E ( $f_1g_0d_0$ )	F ( $f_1g_0d_1$ )	G ( $f_1g_1d_0$ )	H ( $f_1g_1d_1$ )
A ( $f_0g_0d_0$ )	0,021	0,357	0,084	0,189	0,165	0,204	0,408	0,096
B ( $f_0g_0d_1$ )	0,084	0,089	0,076	0,128	0,150	0,136	0,072	0,144
C ( $f_0g_1d_0$ )	0,084	0,323	0,021	0,126	0,150	0,036	0,272	0,144
D ( $f_0g_1d_1$ )	0,336	0,081	0,019	0,084	0,135	0,024	0,048	0,216
E ( $f_1g_0d_0$ )	0,019	0,063	0,236	0,171	0,110	0,306	0,102	0,064
F ( $f_1g_0d_1$ )	0,076	0,016	0,304	0,114	0,100	0,204	0,018	0,096
G ( $f_1g_1d_0$ )	0,076	0,057	0,084	0,114	0,100	0,054	0,068	0,096
H ( $f_1g_1d_1$ )	0,304	0,014	0,076	0,076	0,090	0,036	0,012	0,144

A-t-elle une région de stabilité?

## MUSIQUES FORMELLES

Soit 100 mécanismes Z dont le schéma est résumé par la MPTZ. A l'instant t,  $d_A$  mécanismes auront une trame A,  $d_B$  une trame B, etc...,  $d_H$  une trame H. A l'instant suivant ( $t + \Delta t$ ) tous les 100 mécanismes produiront des trames par exemple A avec des probabilités inscrites dans la MPTZ. Ainsi,

0,021.d<sub>A</sub> resteront en A,

0,357.d<sub>B</sub> donneront A.

0,084.d<sub>0</sub> donneront A.

.....

0,096.d<sub>H</sub> donneront A.

Les  $d_A$  trames de l'instant  $t$ , deviendront  $d'_A$  trames à l'instant  $t + \Delta t$ , et ce nombre sera égal à la somme de toutes les trames qui seront produites par les mécanismes restants, conformément aux probabilités correspondantes. Donc :

$$(e_1) \left\{ \begin{array}{l} d'_A = 0,021 d_A + 0,357 d_B + 0,084 d_C + \dots\dots\dots + 0,096 d_H. \\ \text{De même pour les sept autres trames :} \\ d'_B = 0,084 d_A + 0,089 d_B + 0,076 d_C + \dots\dots\dots + 0,144 d_H. \\ d'_C = 0,084 d_A + 0,323 d_B + 0,021 d_C + \dots\dots\dots + 0,144 d_H. \\ \dots\dots\dots \\ d'_H = 0,304 d_A + 0,014 d_B + 0,076 d_C + \dots\dots\dots + 0,114 d_H. \end{array} \right.$$

A l'équilibre, la fréquence des trames A, B, C, . . . . ., H, restera constante et les huit équations précédentes deviendront :

$$(d'_A = d_A, d'_B = d_B, d'_C = d_C \dots\dots\dots d'_H = d_H).$$

[illegible]

D'autre part :

$$d_A + d_B + d_C + \dots + d_H = 100$$

## MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

Si nous remplaçons une des huit équations par la dernière, nous obtenons un système de huit équations linéaires à huit inconnues. La résolution par la méthode classique des déterminants donne les valeurs suivantes :

$$(e_3) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_A = 0,17, d_B = 0,13, d_C = 0,13, d_D = 0,11, d_E = 0,14, d_F = 0,12, \\ d_G = 0,10, d_H = 0,10 \end{array} \right.$$

ce sont les probabilités des trames à l'équilibre.

Mais cette méthode est très laborieuse car les chances d'erreurs sont très élevées (à moins de disposer d'une calculatrice !).

La deuxième méthode (\*) plus approximative mais suffisante consiste à faire partir tous les 100 mécanismes Z sur une seule trame et à les laisser évoluer tous seuls. Après quelques oscillations plus ou moins longues, l'équilibre, s'il existe, sera atteint et les proportions des trames resteront invariables.

Nous remarquons que le système d'équations (e<sub>1</sub>) peut être décomposé en :

1. Deux vecteurs V' et V qui peuvent se représenter par deux matrices colonnes :

$$V' = \begin{vmatrix} d'_A \\ d'_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d'_G \\ d'_H \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{vmatrix} d_A \\ d_B \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ d_G \\ d_H \end{vmatrix}$$

2. Un opérateur linéaire, la matrice des probabilités de transition, Z. Par conséquent, le système (e<sub>1</sub>) peut se résumer en une égalité matricielle.

$$(e_4) \quad V' = Z.V$$

(\*) Voir page 102.

## MUSIQUES FORMELLES

De sorte que faire partir tous les 100 mécanismes Z sur la trame X et les laisser évoluer « librement » signifie : exercer sur le vecteur colonne

$$V = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 100 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

un opérateur linéaire :

$$Z = \begin{vmatrix} 0,021 & 0,357 & 0,084 & 0,189 & 0,165 & 0,204 & 0,408 & 0,096 \\ 0,084 & 0,089 & 0,076 & 0,126 & 0,150 & 0,136 & 0,072 & 0,144 \\ 0,084 & 0,323 & 0,021 & 0,126 & 0,150 & 0,036 & 0,272 & 0,144 \\ 0,336 & 0,081 & 0,019 & 0,084 & 0,135 & 0,024 & 0,048 & 0,216 \\ 0,019 & 0,063 & 0,336 & 0,171 & 0,110 & 0,306 & 0,102 & 0,064 \\ 0,076 & 0,016 & 0,304 & 0,114 & 0,100 & 0,204 & 0,018 & 0,096 \\ 0,076 & 0,057 & 0,084 & 0,114 & 0,100 & 0,054 & 0,068 & 0,096 \\ 0,304 & 0,014 & 0,076 & 0,076 & 0,090 & 0,036 & 0,012 & 0,144 \end{vmatrix}$$

d'une manière continue, à chaque instant t. Comme nous avons décomposé la continuité en une succession discontinue d'épaisseur temporelle  $\Delta t$  l'égalité ( $e_4$ ) sera appliquée à chaque étape  $\Delta t$ .

Ainsi au départ (instant  $t = 0$ ), le vecteur des populations des mécanismes sera

$$V^0$$

Après la première étape (instant  $0 + \Delta t$ ) il sera

$$V' = Z \cdot V^0$$

Après la deuxième étape (instant  $0 + 2\Delta t$ ) il sera

$$V'' = Z \cdot V' = Z^2 V^0$$

A la nième étape (instant  $n\Delta t$ ) il sera

$$V^{(n)} = Z^n \cdot V^0$$



# MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

Et en appliquant ces données au vecteur

$$V^0_H = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \end{vmatrix}$$

après la première étape à l'instant  $\Delta t$  :

$$V'_H = Z.V^0_H = \begin{vmatrix} 9,6 \\ 14,4 \\ 14,4 \\ 21,6 \\ 6,4 \\ 9,6 \\ 9,6 \\ 14,4 \end{vmatrix}$$

après la deuxième étape à l'instant  $2\Delta t$  :

$$V''_H = Z.V'_H = \begin{vmatrix} 18,941 \\ 10,932 \\ 14,477 \\ 11,148 \\ 15,156 \\ 11,955 \\ 8,416 \\ 8,959 \end{vmatrix}$$

après la troisième étape à l'instant  $3\Delta t$  :

$$V'''_H = Z.V''_H = \begin{vmatrix} 16,860 \\ 10,867 \\ 13,118 \\ 13,143 \\ 14,575 \\ 12,257 \\ 8,145 \\ 11,046 \end{vmatrix}$$

# MUSIQUES FORMELLES

après la quatrième étape à l'instant  $4\Delta t$  :

$$V''''_H = Z.V''''_H = \begin{vmatrix} 17,111 \\ 11,069 \\ 13,792 \\ 12,942 \\ 14,558 \\ 12,111 \\ 8,238 \\ 10,716 \end{vmatrix}$$

Ainsi, après la 4<sup>e</sup> étape, sur les 100 mécanismes, 17 auront en moyenne la trame A, 11 la trame B, 14 la trame C, etc., 11 la trame H.

Si nous confrontons les composantes du vecteur  $V''''$  aux valeurs ( $e_3$ ) nous remarquons que déjà à la 4<sup>e</sup> étape nous avons presque atteint l'équilibre du système. Par conséquent, le mécanisme que nous avons bâti montre un amortissement très rapide des oscillations et une convergence très grande vers l'équilibre final, le but (Stóchos). La perturbation  $P_H$  qui a été infligée au mécanisme MPTZ lorsque nous avons considéré que tous les mécanismes (ici 100) partaient sur une seule des trames était une des très fortes que nous pouvions créer.

Calculons maintenant les états des 100 mécanismes Z après la première étape avec application des perturbations maximales P.

$$V_A^0 = \begin{vmatrix} P_A \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad V_A' = \begin{vmatrix} 2,1 \\ 8,4 \\ 8,4 \\ 33,6 \\ 1,9 \\ 7,6 \\ 7,6 \\ 30,4 \end{vmatrix} \quad V_B^0 = \begin{vmatrix} P_B \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad V_B' = \begin{vmatrix} 35,7 \\ 8,9 \\ 32,3 \\ 8,1 \\ 6,3 \\ 1,6 \\ 5,7 \\ 1,4 \end{vmatrix}$$

$$V_C^0 = \begin{vmatrix} P_C \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad V_C' = \begin{vmatrix} 8,4 \\ 7,6 \\ 2,1 \\ 1,9 \\ 33,6 \\ 30,4 \\ 8,4 \\ 7,6 \end{vmatrix} \quad V_D^0 = \begin{vmatrix} P_D \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 100 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad V_D' = \begin{vmatrix} 18,9 \\ 12,6 \\ 12,6 \\ 8,4 \\ 17,1 \\ 11,4 \\ 11,4 \\ 7,6 \end{vmatrix}$$

## MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

$P_E$		$P_F$																																						
$V_E^0 =$	<table> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>100</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> </table>	0	0	0	0	100	0	0	0	$V_E' =$	<table> <tr><td>16,5</td></tr> <tr><td>15,0</td></tr> <tr><td>15,0</td></tr> <tr><td>13,5</td></tr> <tr><td>11,0</td></tr> <tr><td>10,0</td></tr> <tr><td>10,0</td></tr> <tr><td>9,0</td></tr> </table>	16,5	15,0	15,0	13,5	11,0	10,0	10,0	9,0	$V_F^0 =$	<table> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>100</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> </table>	0	0	0	0	0	0	100	0	0	$V_F' =$	<table> <tr><td>20,4</td></tr> <tr><td>13,6</td></tr> <tr><td>3,6</td></tr> <tr><td>2,4</td></tr> <tr><td>30,6</td></tr> <tr><td>20,4</td></tr> <tr><td>5,4</td></tr> <tr><td>3,6</td></tr> </table>	20,4	13,6	3,6	2,4	30,6	20,4	5,4	3,6
0																																								
0																																								
0																																								
0																																								
100																																								
0																																								
0																																								
0																																								
16,5																																								
15,0																																								
15,0																																								
13,5																																								
11,0																																								
10,0																																								
10,0																																								
9,0																																								
0																																								
0																																								
0																																								
0																																								
0																																								
0																																								
100																																								
0																																								
0																																								
20,4																																								
13,6																																								
3,6																																								
2,4																																								
30,6																																								
20,4																																								
5,4																																								
3,6																																								

$P_G$																			
$V_G^0 =$	<table> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>0</td></tr> <tr><td>100</td></tr> <tr><td>0</td></tr> </table>	0	0	0	0	0	0	100	0	$V_G' =$	<table> <tr><td>40,8</td></tr> <tr><td>7,2</td></tr> <tr><td>27,2</td></tr> <tr><td>4,8</td></tr> <tr><td>10,2</td></tr> <tr><td>1,8</td></tr> <tr><td>6,8</td></tr> <tr><td>1,2</td></tr> </table>	40,8	7,2	27,2	4,8	10,2	1,8	6,8	1,2
0																			
0																			
0																			
0																			
0																			
0																			
100																			
0																			
40,8																			
7,2																			
27,2																			
4,8																			
10,2																			
1,8																			
6,8																			
1,2																			

### RÉCAPITULATION DE L'ANALYSE

Arrivés à cette étape de l'analyse nous devons faire le point.

Au niveau des cases de la trame nous possédons :

1° Des mécanismes partiels de transformation des plages de fréquence, des plages d'intensité et des plages de densité, qui s'expriment par les MPTF, MPTG, MPTD.

2° Une interr réaction univoque entre les trois variables fondamentales F, G, D de la trame. [Transformations du couplage ( $e_0$ )].

Au niveau des trames, nous possédons :

1° Huit trames différentes

A, B, C, D, E, F, G, H.

2° Un mécanisme général, la MPTZ qui résume tous les mécanismes partiels et leurs interr réactions.

3° Un état d'équilibre final (le but, stochos) du système Z vers lequel il tend assez rapidement.

4° Un procédé de déséquilibre du système Z au moyen des perturbations P qui lui sont infligées.

## SYNTHESE

Le mécanisme Z que nous venons de construire n'implique pas une évolution réelle des trames. Il n'établit qu'une situation dynamique, qu'une évolution en puissance. Le processus naturel est celui provoqué par une perturbation P infligée au système Z et le cheminement de ce système vers son but, vers son équilibre, une fois que la perturbation a cessé son action. Nous pouvons donc agir sur ce mécanisme par le truchement d'une perturbation telle que P, plus ou moins forte. De là, à imaginer toute une série de perturbations successives qui contraindraient l'appareil Z à se déplacer vers des régions exceptionnelles contraires à son comportement à l'équilibre, il n'y a qu'un pas. Effectivement, la valeur intrinsèque de l'organisme ainsi créé réside dans le fait qu'il doit se manifester, être. Les perturbations qui lui changent apparemment sa structure représentent autant de négations de cette existence. Et si nous composons une succession de perturbations — négations d'une part; et d'états équilibrés — existences de l'autre, nous ne faisons qu'affirmer le mécanisme Z. De sorte que d'abord nous proposons, nous mettons en évidence son existence en soi, positivement et ensuite nous le confirmons dans son essence en lui opposant les états perturbateurs, négativement. Le bi-pôle être une chose et ne pas être cette chose crée un tout, l'objet que nous nous proposons de fabriquer au début de l'application. Une dialectique duale est ainsi à la base de cette attitude compositionnelle, dialectique qui impose la marche à suivre. Les sciences « expérimentales » sont l'expression de ce raisonnement sur un plan analogue. Une expérience établit un corps de données, un réseau qu'elle dégage, à l'aide de négations et de transformations infligées à ce corps, du magma de la réalité objective. Et la répétition des opérations duales est une condition fondamentale sur laquelle repose tout l'univers de la connaissance. Constater une seule fois n'est pas définir. Et la causalité se confond avec la répétition de phénomènes considérés identiques.

En conclusion, cette dialectique duale dont nous nous armons pour composer dans le cadre de ces mécanismes est homothétique à celle des sciences expérimentales et nous pouvons étendre la comparaison, à celle des êtres biologiques, à celle des êtres tout court, ce qui nous ramène au point de départ.

Ainsi, il faut proposer un être, ensuite lui infliger une modification. Il va sans dire que proposer l'être ou sa modification signifie dans notre cas précis de composition musicale, donner les moyens à un observateur humain de percevoir les deux propositions et de les comparer. Puis répéter suffisamment de fois les oppositions, être et changement, pour identifier l'être.

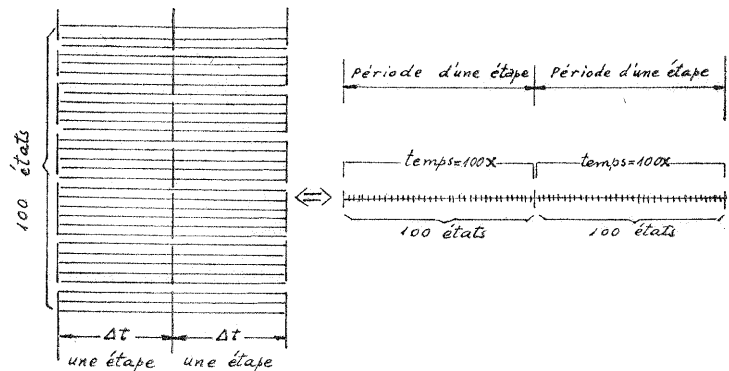
Que signifie l'identification dans le cas de notre mécanisme Z ?

## Parenthèse

Nous avons supposé au cours de l'analyse que 100 mécanismes Z étaient présents simultanément, et que nous suivions les règles de jeux de ces mécanismes à chaque instant d'une évolution créée par un déplacement hors de la zone d'équilibre. Nous comparions donc les états de 100 mécanismes d'un  $\Delta t$  aux états de ces 100 mécanismes du  $\Delta t$  suivant. De sorte que comparer deux étapes successives du groupe de 100 états simultanés signifie, *dénombrer* deux fois cent états. Le dénombrement en tant qu'action abstraite implique des opérations ordonnées : observer un par un les 100 mécanismes, les classer, les trier, puis, à l'étape suivante, recommencer avec les 100 nouveaux et finalement comparer les classes nombre contre nombre. Et si l'observation de chaque mécanisme nécessite une fraction de temps  $x$ , pour dénombrer 200 mécanismes il faudrait disposer d'un temps  $200 x$ .

Ce raisonnement nous permet donc de transposer dans l'abstrait une simultanéité en une succession lexicographique (temporelle) sans enlever un tant soit peu de la définition des transformations engendrées par le schéma Z.

Ainsi comparer deux étapes successives des 100 mécanismes Z, revient à comparer 100 états produits dans un intervalle de temps  $100 x$  à 100 autres états produits dans un intervalle de temps également  $100 x$ .



## MUSIQUES FORMELLES

### IDENTIFICATION MATÉRIELLE DU MÉCANISME Z

Identification du mécanisme Z signifie confrontation entre elles de toutes ses possibilités d'être, essentiellement : états perturbés contre états à l'équilibre, et indépendamment de l'ordre.

L'identification s'établira sur des périodes de temps 100 x égales, suivant le diagramme

$$\begin{array}{l} \text{Phénomène : } \left| P_N \rightarrow \right| \left| E \rightarrow \right| \left| P_M \rightarrow \right| \left| E \dots \right| \\ \text{Temps : } \left| 100 \text{ x } \right| \left| 100 \text{ x } \right| \left| 100 \text{ x } \right| \left| 100 \text{ x } \dots \right| \end{array}$$

$P_N$  et  $P_M$  représentent des perturbations quelconques et E l'état de Z à l'équilibre.

Une alternance de P et de E est un protocole dans lequel 100 x est l'unité de temps (100 x = période de l'étape).

Exemple :  $P_A P_A E E E P_H P_G P_G E P_C \dots$

Un nouveau mécanisme W peut être construit avec une MPT, etc., qui régirait l'identification, l'évolution de la composition sur des ensembles de temps plus généraux.

Nous ne poursuivrons pas l'investigation dans cette voie car elle nous mènerait trop loin.

Une réalisation qui va suivre utilisera un diagramme cinématique très simple de perturbations P et d'équilibre E conditionnés d'une part, par les degrés de perturbations P et de l'autre, par une sélection librement consentie.

$$(e_5) \quad E \rightarrow P_A^0 \rightarrow P_A' \rightarrow E \rightarrow P_C^0 \rightarrow P_C' \rightarrow P_B^0 \rightarrow P_B' \rightarrow E \rightarrow P_A'$$

### DÉFINITION DE L'ÉTAT E ET DES PERTURBATIONS P

D'après ce qui précède, l'état à l'équilibre E sera exprimé par une suite de trames telles que :

*Protocole E (Z)*

ADFFECBDBCFEFADGCHCCHBEDFEFFECFEHBFFF  
BCHDBABADDBADADAHHBGADGAHDADGFBEBGABEBB...

## MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

Pour effectuer ce protocole, nous pouvons utiliser huit urnes [A] [B] [C] [D] [E] [F] [G] [H] chacune contenant des boules de huit couleurs différentes dont les proportions sont données par les probabilités des colonnes de la MPTZ. Par exemple l'urne [G] contiendra 40,8 % de boules rouges A, 7,2 % de boules oranges B, 27,2 % de boules jaunes C, 4,8 % de boules marron D, 10,2 % de boules vertes E, 1,8 % de boules bleues F, 6,8 % de boules blanches G, et 1,2 % de boules noires H. De même pour les sept autres urnes.

Nous tirons au hasard de l'urne [G] une boule jaune C. Nous notons le résultat et nous remettons la boule dans l'urne [G]. Nous tirons au hasard de l'urne [C] une boule verte E. Nous notons le résultat et nous remettons la boule dans l'urne [C]. Nous tirons au hasard de l'urne [E] une boule noire H. Nous notons le résultat et nous remettons la boule dans l'urne [E]. Nous tirons au hasard de l'urne [H] une boule, etc.

Le protocole noté jusqu'ici est le suivant : G C E H...

*Protocole  $P^0_A (V^0_A)$*

Il est évidemment

A A A A...

*Protocole  $P'_A (V'_A)$*

Nous considérons une urne Y dont les boules de huit couleurs sont dans les proportions suivantes :

2,1 %	de	couleur A.
8,4 %	de	— B.
8,4 %	de	— C.
33,6 %	de	— D.
1,9 %	de	— E.
7,6 %	de	— F.
7,6 %	de	— G.
30,4 %	de	— H.

Après chaque tirage, nous remettons la boule dans l'urne Y et un protocole très probable sera de la composition suivante :

GFFGHDDCBHGGHDDHBBHCDDDCGDDDDFDDHHHBFFHDBHD  
HHCHHECHDBHHDHFFHDDGDAFHHDHDFDG...

## MUSIQUES FORMELLES

### Protocole $P'_C (V'_C)$

La même méthode nous fournit un protocole de  $P'_C$

EEGFGEFEEFADFEBECGEEAEFBFBEBEADEFAAEEFHABFECHFEB  
EFEEFHFABEBFFFEFEEAFHFBEFEEB...

### Protocole $P^0_C (V^0_C)$

CCCCCCCCCCCC...

### Protocole $P^0_B (V^0_B)$

BBBBBBBBBBBB...

### Protocole $P'_B (V'_B)$

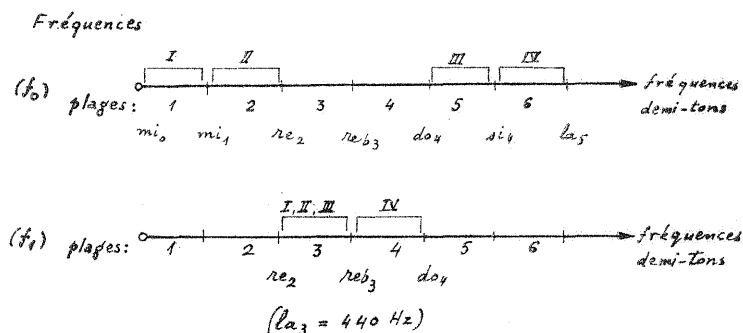
AAADCCECDCAACEBAFGBCAAADGCDDCGCADGAAGECCAACAHA  
ACGCDAACDAABDCCCGACACAACACB...

## RÉALISATION «ANALOGIQUE A» POUR ORCHESTRE.

L'exemple instrumental ci-dessous récapitule point par point l'exposé fait jusqu'ici dans les limites des instruments d'orchestre, de l'exécution et de l'écriture conventionnelle.

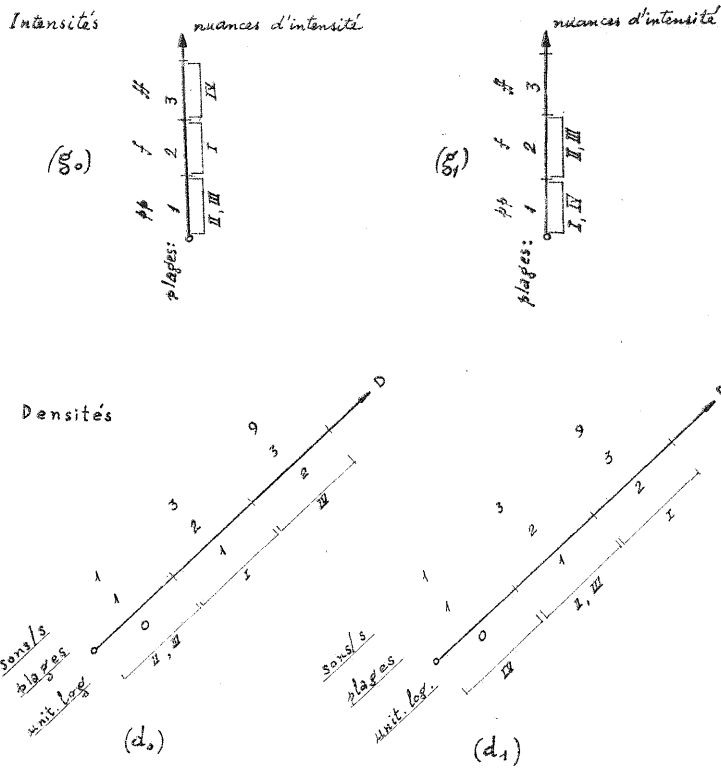
Le mécanisme qui sera utilisé est le système Z qui a déjà été traité numériquement.

### Choix des variables des trames:

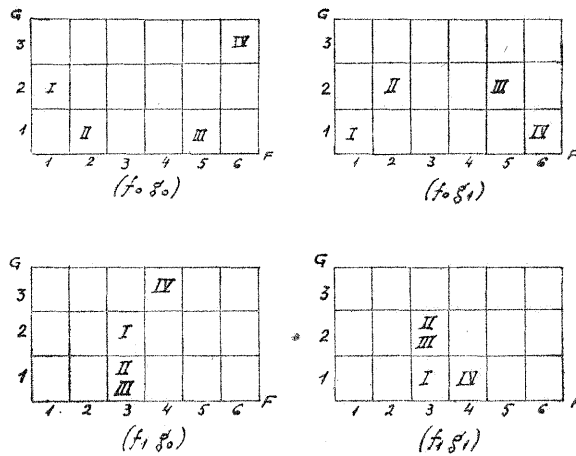




# MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

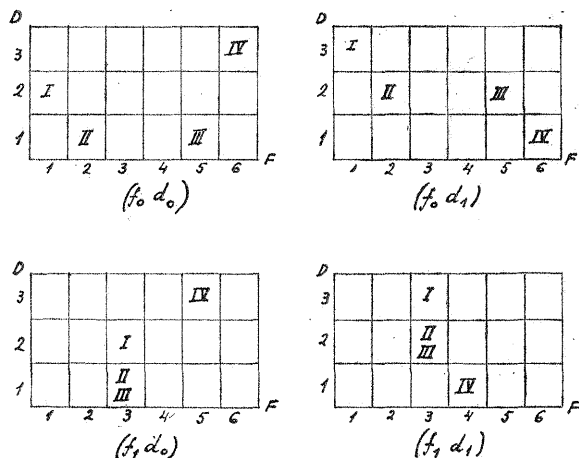


Ce choix nous donne les trames partielles FG suivantes :



## MUSIQUES FORMELLES

et les trames partielles FD suivantes :



Les trames partielles GD étant une conséquence des FG et FD.

Les chiffres romains sont les agents de liaison entre toutes les cases des trois plans de référence, FG, FD, GD, de manière que les diverses combinaisons  $(f_i, g_i, d_i)$  prévues théoriquement soient possibles.

Exemple : soit la trame  $(f_1, g_1, d_0)$  et l'être sonore  $C_3$  correspondant à la plage des fréquences n° 3.

D'après les trames partielles ci-dessus, cet être sera la somme arithmétique des grains des cases I, II, III, à trois dimensions, qui sont situées sur la plage des fréquences n° 3.  $C_3 = I + II + III$ .

Les dimensions de la case correspondante à I sont :  $\Delta F =$  plage 3,  $\Delta G =$  plage 1,  $\Delta D =$  plage 2;

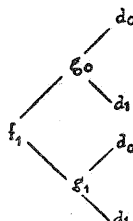
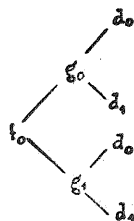
Les dimensions de la case correspondante à II sont :  $\Delta F =$  plage 3,  $\Delta G =$  plage 2,  $\Delta D =$  plage 1;

Les dimensions de la case correspondante à III sont :  $\Delta F =$  plage 3,  $\Delta G =$  plage 2,  $\Delta D =$  plage 1.

Par conséquent dans cet être sonore les grains auront des fréquences comprises dans la plage 3, des intensités comprises dans les pages 1 et 2 et ils formeront des densités comprises dans les pages 1 et 2 avec les correspondances énoncées ci-dessus.

# MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

Les huit trames principales A, B, C, D, E, F, G, H, qui découlent des combinaisons



seront les suivantes :

Trame A  
(f<sub>0</sub> g<sub>0</sub> d<sub>0</sub>)

#							9 IV
f	3 I						
pp		1 II			1 III		
	mi <sub>0</sub>	mi <sub>1</sub>	re <sub>2</sub>	re <sub>3</sub>	do <sub>4</sub>	si <sub>4</sub>	la <sub>5</sub>

Trame B  
(f<sub>0</sub> g<sub>0</sub> d<sub>1</sub>)

#							1 IV
f	9 I						
pp		3 II			3 III		
	mi <sub>0</sub>	mi <sub>1</sub>	re <sub>2</sub>	re <sub>3</sub>	do <sub>4</sub>	si <sub>4</sub>	la <sub>5</sub>

Trame C  
(f<sub>0</sub> g<sub>1</sub> d<sub>0</sub>)

#							
f		1 II			1 III		
pp	3 I					9 IV	
	mi <sub>0</sub>	mi <sub>1</sub>	re <sub>2</sub>	re <sub>3</sub>	do <sub>4</sub>	si <sub>4</sub>	la <sub>5</sub>

Trame D  
(f<sub>0</sub> g<sub>1</sub> d<sub>1</sub>)

#							
f		3 II			3 III		
pp	9 I					1 IV	
	mi <sub>0</sub>	mi <sub>1</sub>	re <sub>2</sub>	re <sub>3</sub>	do <sub>4</sub>	si <sub>4</sub>	la <sub>5</sub>

Trame E  
(f<sub>1</sub> g<sub>0</sub> d<sub>0</sub>)

#				9 IV			
f			3 I				
pp			1+1 II+III				
	mi <sub>0</sub>	mi <sub>1</sub>	re <sub>2</sub>	re <sub>3</sub>	do <sub>4</sub>	si <sub>4</sub>	la <sub>5</sub>

Trame F  
(f<sub>1</sub> g<sub>0</sub> d<sub>1</sub>)

#				1 IV			
f			9 I				
pp			3+3 II+III				
	mi <sub>0</sub>	mi <sub>1</sub>	re <sub>2</sub>	re <sub>3</sub>	do <sub>4</sub>	si <sub>4</sub>	la <sub>5</sub>

Trame G  
(f<sub>1</sub> g<sub>1</sub> d<sub>0</sub>)

#							
f			1+1 II+III				
pp			3 I	9 IV			
	mi <sub>0</sub>	mi <sub>1</sub>	re <sub>2</sub>	re <sub>3</sub>	do <sub>4</sub>	si <sub>4</sub>	la <sub>5</sub>

Trame H  
(f<sub>1</sub> g<sub>1</sub> d<sub>1</sub>)

#							
f			3+3 II+III				
pp			9 I	1 IV			
	mi <sub>0</sub>	mi <sub>1</sub>	re <sub>2</sub>	re <sub>3</sub>	do <sub>4</sub>	si <sub>4</sub>	la <sub>5</sub>

Nota : les chiffres inscrits dans les cases sont les densités moyennes grains/sec

## MUSIQUES FORMELLES

La durée  $\Delta t$ , de chaque trame est de 1,11 sec. soit : une blanche égale 54 MM. C'est pendant cette durée que doivent se réaliser les densités des cases occupées.

La période de temps nécessaire à l'exposition du protocole de chaque étape, (du protocole à l'équilibre et des protocoles des perturbations) est de 30  $\Delta t$  soit 15 rondes, (une ronde = 27 MM).

L'enchaînement des perturbations et des équilibres de la MPTZ est donné par le diagramme cinématique qui a été choisi à cet effet.

(e<sub>5</sub>)  $E \rightarrow P^0_A \rightarrow P'_A \rightarrow E \rightarrow P'_C \rightarrow P^0_C \rightarrow P^0_B \rightarrow P'_B \rightarrow E \rightarrow P'_A$

L'exemple de la partition de musique (\*) barres 105 à 115, comprend une section de la perturbation  $P^0_B$  et de la  $P'_B$ . Le changement de période s'effectue à la barre 109. Les trames sont disposées comme suit :

105	109	115
.....   BB   BB   BB	BB   AA   GE   CC   AA   CA   AH	.....

Fin de la période de perturbation $P^0_B$	➤   ➤	début de retour à l'équilibre (perturbation $P'_B$ ).
---	-------	---

La réalisation « Analogique A » remplace les grains élémentaires sinusoïdaux par des nuages très ordonnés de grains élémentaires qui restituent le timbre des cordes. Une réalisation avec des instruments classiques ne saurait en aucun cas, en raison des limites humaines de jeux, donner des trames dont le timbre puisse être de nature différente de celui des cordes.

L'hypothèse donc d'une sonorité de deuxième ordre ne pourrait dans ces conditions se trouver ni confirmée ni infirmée.

Par contre une réalisation avec des moyens électromagnétiques puissants tels que des cerveaux électroniques, machines analogiques, etc., devrait permettre la démonstration d'une sonorité de premier ordre, à base de grains élémentaires sinusoïdaux, ou du type de Gabor.

Tout en souhaitant la technique qui se fait attendre nous allons montrer des trames plus complexes réalisables avec les moyens d'un studio électroacoustique ordinaire qui disposerait de plusieurs pistes magnétiques ou de magnétophones synchrones, de filtres et de générateurs de sons sinusoïdaux.

(\*) Pour des raisons techniques, les trames E, F, G, H, ont été légèrement simplifiées.

Handwritten musical score for Violin, Violoncello, and Contrabasso. The score is written on three systems of staves. The Violin part is on the top staff, Violoncello on the middle, and Contrabasso on the bottom. The music is in 2/4 time and features various dynamics and articulations. The score is numbered 105, 106, 107, 108, 109, and 110. The Violoncello part includes the instruction "frape c. Corno" and the Contrabasso part includes "Sans sound frape c. Corno".

Handwritten musical score for Violin, Violoncello, and Contrabass. The score is written on three systems of staves. The Violin part (Viol.) is on the top staff, the Violoncello part (V.C.) is on the middle staff, and the Contrabass part (C.B.) is on the bottom staff. The music is in G major (one sharp) and 4/4 time. The Violin part features a melodic line with various ornaments and slurs. The V.C. and C.B. parts provide harmonic support with chords and moving lines. The score includes measure numbers 110, 111, 112, 113, and 114. A handwritten note "same sound" is present in the C.B. part at measure 114.

Viol.

V.C

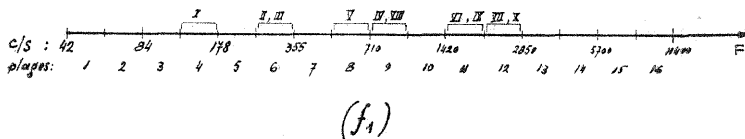
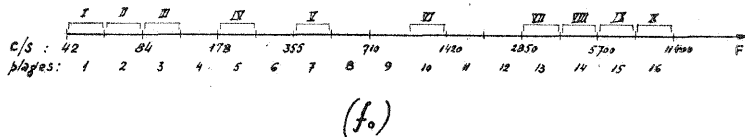
C.B

## MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

EXEMPLE EXTRAIT DE «ANALOGIQUE B» ŒUVRE DE MUSIQUE ÉLECTROMAGNÉTIQUE (sons sinusoïdaux).

On choisit :

1° Deux groupes de plages de fréquences :  $f_0, f_1$ .

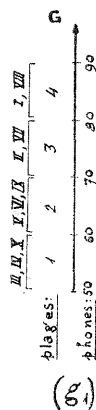
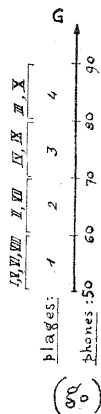


Les protocoles de ces deux groupes seront tels qu'ils obéiront encore aux MPT précédentes :

	↓	$f_0$	$f_1$		↓	$f_0$	$f_1$
(a)	$f_0$	0,2	0,8	(b)	$f_0$	0,85	0,4
	$f_1$	0,8	0,2		$f_1$	0,15	0,6

dont  $(\alpha)$  et  $(\beta)$  sont les paramètres.

2° Deux groupes de plages d'intensités :  $g_0, g_1$ .



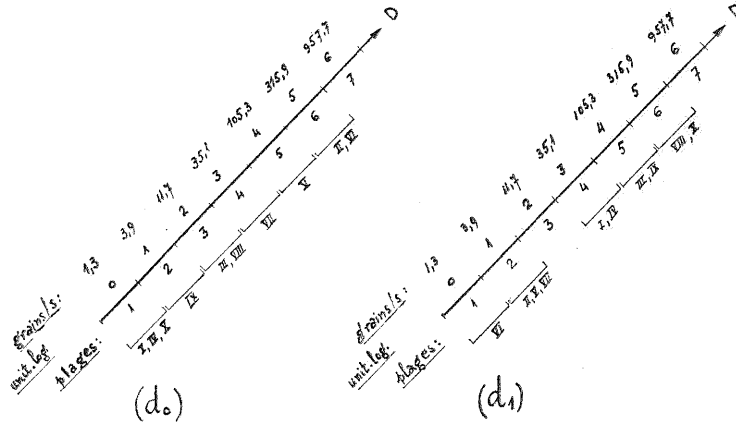
## MUSIQUES FORMELLES

Les protocoles de ces groupes obéiront encore aux mêmes MPT paramétrées :

	$g_0$	$g_1$
$(\gamma)$ $g_0$	0,2	0,8
$g_1$	0,8	0,2

	$g_0$	$g_1$
$(\epsilon)$ $g_0$	0,85	0,4
$g_1$	0,15	0,6

3° Deux groupes de plages de densités :  $d_0, d_1$ .



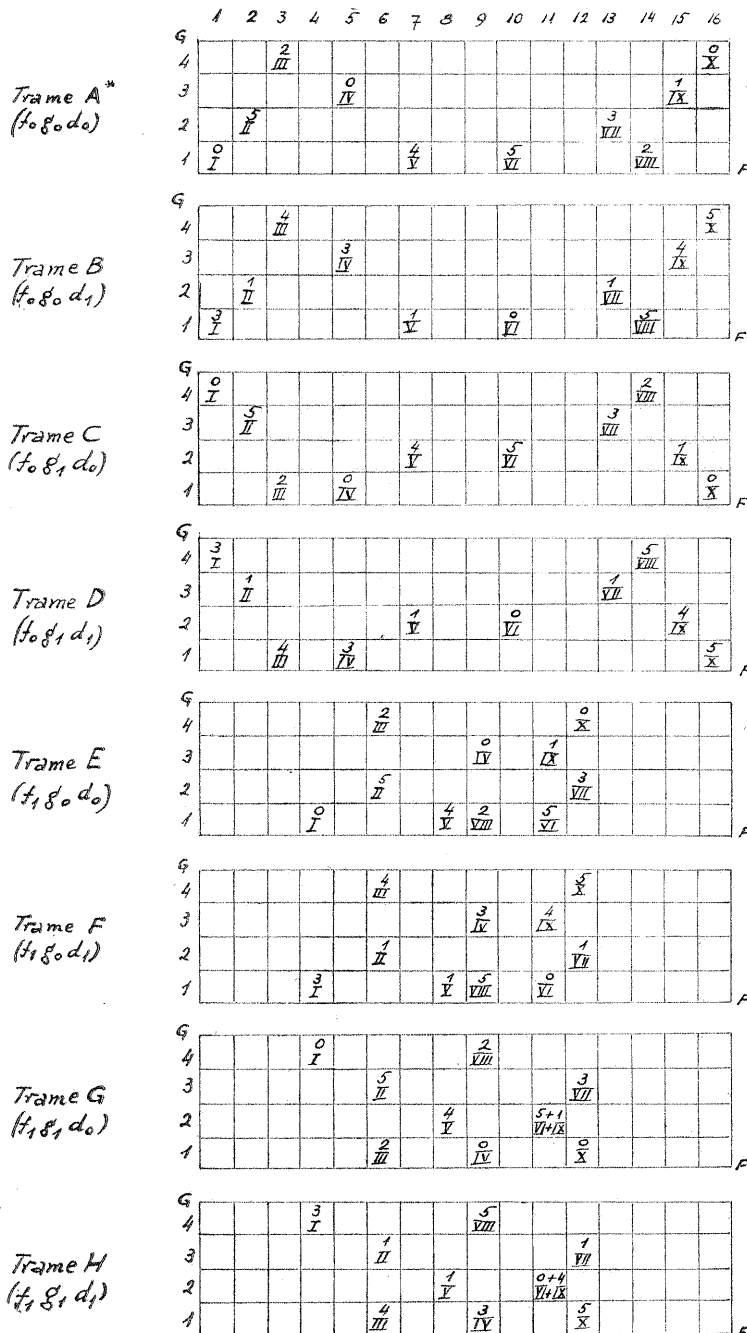
Les protocoles de ces groupes obéiront encore aux mêmes MPT paramétrées :

	$d_0$	$d_1$
$(\lambda)$ $d_0$	0,2	0,8
$d_1$	0,8	0,2

	$d_0$	$d_1$
$(\mu)$ $d_0$	0,85	0,4
$d_1$	0,15	0,6

Ce choix nous donne les trames principales A, B, C, D, E, F, G, H.





(\*) Les chiffres arabes au-dessus des chiffres romains des cases indiquent la densité en unités logarithmiques. Ainsi, la case (10,1) aura une densité de  $[(\log 1,3/\log 3 + 5)]$  terts soit 315,9 grains/sec. en moyenne.

## MUSIQUES FORMELLES

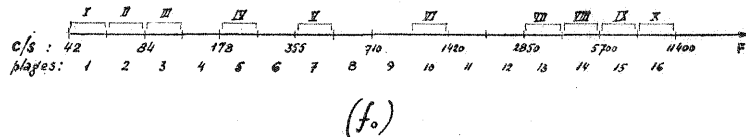
La durée  $\Delta t$  de chaque trame est de 0,5 sec. environ. La période d'exposition d'une perturbation ou d'un état équilibré est d'environ 15 sec.

Nous choisissons le même protocole des échanges entre perturbations et équilibre de la MPTZ, celui d'« ANALOGIQUE A ».

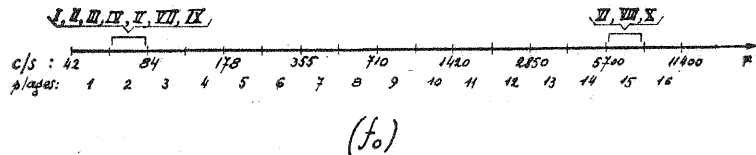
$$(e_5) \quad E \rightarrow P^0_A \rightarrow P'_A \rightarrow E \rightarrow P'_C \rightarrow P^0_C \rightarrow P^0_B \rightarrow P'_B \rightarrow E \rightarrow P'_A$$

Les trames de « ANALOGIQUE B » calculées jusqu'ici constituent un choix spécial. Au cours de cette composition musicale d'autres trames sont utilisées plus particulièrement mais obéissant toujours aux mêmes règles de couplage ainsi qu'à la même MPTZ. Effectivement si l'on considère les combinaisons des plages de la variable  $f_1$  d'une trame, nous nous apercevons que sans altérer le nom de la variable  $f_1$  nous pouvons lui changer la structure.

Ainsi pour  $(f_0)$  nous avons les plages suivantes, dotées de chiffres romains pour établir la liaison avec les plages des deux autres variables :



Mais nous aurions pu choisir une autre combinaison  $(f_0)$  :



La question se pose : « Etant donné  $n$  divisions  $\Delta F$  (plages sur  $F$ ) quel est le nombre total de combinaisons possibles des plages  $\Delta F$ ? »

1<sup>er</sup> cas : Aucune des  $n$  plages n'est utilisée.

La trame correspondante à cette combinaison est silencieuse.

Le nombre de ces combinaisons sera  $\frac{n!}{(n-0)!0!} (= 1)$ .

# MUSIQUE STOCHASTIQUE MARKOVIENNE

2<sup>me</sup> cas : 1 des n plages est occupée. Le nombre des combinaisons sera

$$\frac{n!}{(n-1)!1!}$$

3<sup>me</sup> cas : 2 des n plages sont occupées. Le nombre des combinaisons sera

$$\frac{n!}{(n-2)!2!}$$

.....

m<sup>e</sup> cas : m des n plages sont occupées. Le nombre des combinaisons sera

$$\frac{n!}{(n-m)!m!}$$

.....

n<sup>e</sup> cas : n des plages sont occupées. Le nombre des combinaisons sera

$$\frac{n!}{(n-n)!n!}$$

Le nombre total des combinaisons sera égal à la somme de toutes les précédentes :

$$\begin{aligned} & \frac{n!}{(n-0)!0!} + \frac{n!}{(n-1)!1!} + \frac{n!}{(n-2)!2!} + \dots \\ & + \frac{n!}{[n-(n-1)]!(n-1)!} + \frac{n!}{(n-n)!n!} = 2^n \end{aligned}$$

## MUSIQUES FORMELLES

Le même raisonnement est valable pour les deux autres variables d'une trame.

Ainsi pour l'intensité, si  $k$  est le nombre de plages  $\Delta G$  disponibles, le nombre total des variables  $g_i$  sera  $2^k$  et pour la densité, si  $r$  est le nombre de plages  $\Delta D$  disponibles, le nombre total des variables  $d_i$  sera  $2^r$ .

Par conséquent, le nombre total des trames possibles sera :

$$T = 2^{n+k+r}$$

Dans le cas de « ANALOGIQUE B » nous pourrions obtenir :

$$2^{16+4+7} = 2^{27} = 134\,217\,728 \text{ trames distinctes.}$$

*Remarque importante.* — Nous avons admis dans la première partie de ce livre que la richesse d'une évolution musicale, évolution basée sur la méthode de protocoles stochastiques des variables couplées des trames, était fonction des transformations des entropies de ces variables. D'après le calcul précédent nous nous apercevons que sans modifier les entropies des MPTF, MPTG, MPTD, nous pouvons obtenir une évolution supplémentaire sous-jacente, en utilisant les diverses combinaisons des plages (critère topologique).

Ainsi dans « ANALOGIQUE B » les MPTF, MPTG et MPTD ne varieront pas. Par contre, les  $f_i$ ,  $g_i$  et  $d_i$  auront dans le déroulement du temps, des structures nouvelles, corollaires des combinaisons changeantes de leurs plages.

### CONCLUSIONS COMPLÉMENTAIRES SUR LES TRAMES ET LEURS TRANSFORMATIONS

1° *Règle.* — Pour former une trame on peut choisir une quelconque combinaison de plages sur F, sur G et sur D, les  $f_i$ ,  $g_i$ ,  $d_i$ .

2° *Condition fondamentale.* — Chaque plage d'une des variables F, G, D doit pouvoir s'associer à une plage correspondante des deux autres variables et dans tous les couplages choisis. (Ceci s'effectue à l'aide des chiffres romains).

3° Cette association est arbitraire (choix libre) pour deux paires, celle de la troisième paire étant obligée, conséquence des deux premières.

*Exemple :* L'association des chiffres romains de  $f_i$  avec ceux de  $g_i$  est libre;

L'association des chiffres romains de  $f_i$  avec ceux de  $d_i$  est libre;

L'association des chiffres romains de  $g_i$  avec ceux de  $d_i$  est obligée, conséquence des deux premières associations.

4° Les composantes  $f_i, g_i, d_i$  des trames ont en général des protocoles stochastiques qui se correspondent étape par étape.

5° Les MPT de ces protocoles seront en général couplées à l'aide de paramètres.

6° Si  $F, G, D$  sont les « variations » (nombre des composantes  $f_i, g_i, d_i$ , respectivement), le nombre maximum de couplages entre les composantes et les paramètres de MPTF, MPTG, MPTD est la somme des produits  $GD + FG + FD$ .

Exemple de « ANALOGIQUE A » ou « B » :

$$\begin{array}{ll} F = 2, (f_0, f_1) & \text{les paramètres des MPT sont : } \alpha, \beta \\ G = 2, (g_0, g_1) & \gamma, \varepsilon \\ D = 2, (d_0, d_1) & \lambda, \mu \end{array}$$

et les couplages sont :

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & f_0 & f_1 & \downarrow & f_0 & f_1 & \downarrow & g_0 & g_1 & \downarrow & g_0 & g_1 & \downarrow & d_0 & d_1 & \downarrow & d_0 & d_1 \\ \downarrow & \gamma & \varepsilon & \downarrow & \lambda & \mu & \downarrow & \beta & \alpha & \downarrow & \lambda & \mu & \downarrow & \alpha & \beta & \downarrow & \gamma & \varepsilon \end{array}$$

soit 12. Effectivement  $FG + FD + GD = 4 + 4 + 4 = 12$ .

7° Si  $F, G, D$  sont les « variations » (nombre des composantes  $f_i, g_i, d_i$ , respectivement) le nombre des trames  $T$  possibles est le produit,  $F.G.D$ .

$$\begin{array}{lll} \text{Exemple : } F = 2, (f_0, f_1) & G = 2, (g_0, g_1) & D = 2, (d_0, d_1); \\ T = 2.2.2 = 8. \end{array}$$

8° Le protocole des trames est stochastique (au sens large) et peut se résumer, lorsque la chaîne est ergodique (tendant à se régulariser), par une MPTZ. Cette matrice aura  $F.G.D$ . lignes et autant de colonnes.

### Projection spatiale.

Dans tout ce chapitre nulle mention n'a été faite de la spatialisation du son.

En effet, le sujet était lié à la conception fondamentale d'un complexe sonore et de son évolution en soi. Pourtant rien n'empêche d'élargir la technique exposée dans ce chapitre et de « sauter » dans l'espace. Nous pouvons par exemple imaginer des protocoles de trames attachés à tel ou tel point de l'espace avec des probabilités de transitions, avec des couplages espaces-sons, etc... La méthode est prête, l'application générale est possible avec les enrichissements en retour qu'elle peut créer.